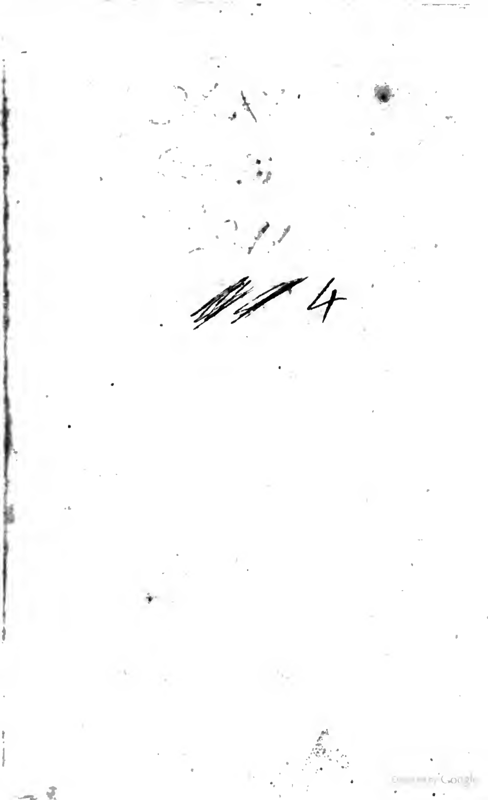








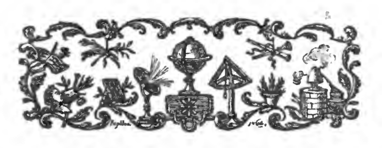


LEÇONS
DE
CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET DE
CALCUL INTÉGRAL.

SECONDE PARTIE.







LEÇONS
DE CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DE CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE VII.

De l'intégration des formules différentielles qui ne renferment qu'une ſeule variable.

66. **I**L va être queſtion de l'intégration de la formule différentielle $X dx$, dans laquelle X eſt une fonction quelconque de la ſeule variable x & de conſtantes. Premierement, ſi X eſt une fraction rationnelle, on pourra toujours, lorſqu'on connoîtra les facteurs du dénominateur, décompoſer $X dx$ en une ſuite finie qui ne renfermera que des termes de la forme de $ax^n dx$, $\frac{a dx}{(p+qx)^n}$, $\frac{(a+bx) dx}{(p^2+2pqx \operatorname{coſ.} \zeta + q^2x^2)^n}$

pu fin. β, & par conféquent $dx = \frac{pdu \text{ fin. } \beta}{q}$, la formule différentielle $\frac{dx}{p^2 + 2pqx \text{ cof. } \beta + q^2 x^2}$ fe changera en celle-ci $\frac{1}{pq \text{ fin. } \beta} \frac{du}{1 + u^2}$ qui a pour intégrale $\frac{A \text{ tang. } u}{pq \text{ fin. } \beta}$. Donc la formule différentielle $\frac{(a + bx)dx}{p^2 + 2pqx \text{ cof. } \beta + q^2 x^2}$ a pour intégrale complette $\frac{b}{2q^2} \log. t + \frac{aq - bp \text{ cof. } \beta}{pq^2 \text{ fin. } \beta} A \text{ tang. } u + c = \frac{b}{2q^2} \log. (p^2 + 2pqx \text{ cof. } \beta + q^2 x^2) + \frac{aq - bp \text{ cof. } \beta}{pq^2 \text{ fin. } \beta}$ $A \text{ tang. } \frac{p \text{ cof. } \beta + qx}{p \text{ fin. } \beta} + c$. Au lieu de la conftante arbitraire c, je puis écrire $c' - \frac{aq - bp \text{ cof. } \beta}{pq^2 \text{ fin. } \beta} A \text{ tang. } \frac{\text{cof. } \beta}{\text{fin. } \beta}$, & de cette maniere les deux derniers termes de l'intégrale deviendront $\frac{aq - bp \text{ cof. } \beta}{pq^2 \text{ fin. } \beta} \left(A \text{ tang. } \frac{p \text{ cof. } \beta + qx}{p \text{ fin. } \beta} - A \text{ tang. } \frac{\text{cof. } \beta}{\text{fin. } \beta} \right) + c'$; or on démontre dans les Elémens de Géométrie que, le rayon étant pris pour l'unité, tang. $(y - z) = \frac{\text{tang. } y - \text{tang. } z}{1 + \text{tang. } y \text{ tang. } z}$; donc $A \text{ tang. } \frac{p \text{ cof. } \beta + qx}{p \text{ fin. } \beta} - A \text{ tang. } \frac{\text{cof. } \beta}{\text{fin. } \beta} =$ $A \text{ tang. } \frac{qx \text{ fin. } \beta}{p + qx \text{ cof. } \beta}$. En faifant ces changemens, au lieu de l'intégrale complette trouvée précédemment,

on a celle-ci : $\frac{b}{2q^2}$ log. $(p^2+2pqx \text{ cof.} \zeta + q^2x^2)$ $+ \frac{aq-bp \text{ cof.} \zeta}{pq^2 \text{ fin.} \zeta} A \text{ tang.} \frac{qx \text{ fin.} \zeta}{p+qx \text{ cof.} \zeta} + c'$. Le feul cas qui paroît échapper eſt celui où $\zeta = 0$; alors la différentielle devient $\frac{(a+bx)dx}{(p+qx)^2}$, qui eſt égale à $\frac{bdx}{q(p+qx)} + \frac{(aq-bp)dx}{q(p+qx)^2}$, dont l'intégrale complette eſt $\frac{b}{q^2}$ log. $(p+qx) - \frac{aq-bp}{q^2(p+qx)} + c$. Mais ſi au lieu de ſuppoſer $\zeta = 0$, on l'eut ſuppoſé infiniment petit, ce qu'on exprime en écrivant pour cof. ζ l'unité, pour ſin. ζ l'arc ζ lui-même, & $\frac{qx\zeta}{p+qx}$ pour A tang. $\frac{qx \text{ fin.} \zeta}{p+qx \text{ cof.} \zeta}$; la derniere formule intégrale auroit donné dans ce cas-ci $\frac{b}{q^2}$ log. $(p+qx)$ $+ \frac{(aq-bp)x}{pq(p+qx)} + c'$, ou mettant $c - \frac{aq-bp}{pq^2}$ pour c', $\frac{b}{q^2}$ log. $(p+qx) - \frac{aq-bp}{q^2(p+qx)} + c$.

Nous aurons réſolu complettement le Problême, ſi nous pouvons faire dépendre l'intégrale de $\frac{(a+bx)dx}{(p^2+2pqx \text{ cof.} \zeta + q^2x^2)^{n+1}}$ de celle de $\frac{dx}{(p^2+2pqx \text{ cof.} \zeta + q^2x^2)^n}$; car en deſcendant toujours de la même maniere, nous parviendrons enfin à une formule différentielle que nous ſaurons inté-

grer. On supposera $\int \frac{(a+bx)\,dx}{(p^2+2pqx\,\text{cos}.\,\mathcal{C}+q^2x^2)^{n+1}} =$
$\frac{A+Bx}{(p^2+2pqx\,\text{cos}.\,\mathcal{C}+q^2x^2)^n} + \int \frac{K\,dx}{(p^2+2pqx\,\text{cos}.\,\mathcal{C}+q^2x^2)^n}$, A, B, K étant des coefficiens constants indéterminés. En différentiant & divisant par dx, on en tire

$$\frac{a+bx}{(p^2+2pqx\,\text{cos}.\,\mathcal{C}+q^2x^2)^{n+1}} =$$
$$\frac{-n(A+Bx)(2pq\,\text{cos}.\,\mathcal{C}+2q^2x)}{(p^2+2pqx\,\text{cos}.\,\mathcal{C}+q^2x^2)^{n+1}} +$$
$$\frac{B+K}{(p^2+2pqx\,\text{cos}.\,\mathcal{C}+q^2x^2)^n}$$; & réduisant tout au même dénominateur, après avoir fait pour abréger $B+K=H$, on a l'équation identique $a+bx = Hp^2-2Anpq\,\text{cos}.\,\mathcal{C}+(2H-2Bn)pqx\,\text{cos}.\,b-2Anq^2x+(Hq^2-2Bnq^2)x^2$, qui donne $Hp^2-2Anpq\,\text{cos}.\,\mathcal{C}=a$, $(2H-2Bn)pq\,\text{cos}.\,\mathcal{C}-2Anq^2=b$, $H-2Bn=0$; & par conséquent $2Bnp^2-2Anpq\,\text{cos}.\,\mathcal{C}=a$, $2Bnpq\,\text{cos}.\,\mathcal{C}-2Anq^2=b$, d'où l'on tire $A=\frac{aq\,\text{cos}.\,\mathcal{C}-bp}{2npq^2\,\text{sin}.\,\mathcal{C}^2}$, $B=\frac{aq-bp\,\text{cos}.\,\mathcal{C}}{2np^2q\,\text{sin}.\,\mathcal{C}^2}$, $K=\frac{(2n-1)(aq-bp\,\text{cos}.\,\mathcal{C})}{2np^2q\,\text{sin}.\,\mathcal{C}^2}$.

Le Problême est donc résolu, & on a

$$\int \frac{(a+bx)\,dx}{(p^2+2pqx\,\text{cos}.\,\mathcal{C}+q^2x^2)^{n+1}} =$$
$$\frac{apq\,\text{cos}.\,\mathcal{C}-bp^2+(aq^2-bpq\,\text{cos}.\,\mathcal{C})x}{2np^2q^2\,\text{sin}.\,\mathcal{C}^2\,(p^2+2pqx\,\text{cos}.\,\mathcal{C}+q^2x^2)^n} +$$
$$\int \frac{(2n-1)(aq-bp\,\text{cos}.\,\mathcal{C})\,dx}{2np^2q\,\text{sin}.\,\mathcal{C}^2\,(p^2+2pqx\,\text{cos}.\,\mathcal{C}+q^2x^2)^n}$$. On voit de plus (comme M. Jean Bernoulli l'a dit le pre-

mier dans les Mémoires de l'Académie, de 1702) que l'intégrale complette de toute formule différentielle rationnelle ne peut renfermer d'autres quantités tranfcendantes que des logarithmes & des arcs de cercle; il nous refte à éclaircir les propofitions que nous venons de démontrer, par des exemples.

On demande d'intégrer la fraction rationnelle $\frac{(a+bx)dx}{a'+b'x+c'x^2}$? Si le dénominateur a fes deux facteurs réels & inégaux, on pourra les repréfenter par $e+fx$, $g+hx$; & la fraction propofée deviendra $\frac{(a+bx)dx}{(a+fx)(g+hx)} = \frac{ah-bg}{he-fg}\frac{dx}{g+hx} - \frac{af-be}{he-fg}\frac{dx}{e+fx}$, dont l'intégrale complette eft $\frac{ah-bg}{he-fg}$. $\frac{\log.(g+hx)}{h} - \frac{af-be}{he-fg}$. $\frac{\log.(e+fx)}{f} + c$. Si les deux facteurs font réels & égaux, on aura à intégrer $\frac{(a+bx)dx}{(g+hx)^2} = \frac{(ah-bg)dx}{h(g+hx)^2} + \frac{b\,dx}{h(g+hx)}$; & il eft vifible que ce fecond membre a pour intégrale complette $\frac{bg-ah}{h^2(g+hx)} + \frac{b}{h^2}\log.(g+hx)+c$. Enfin fi les deux facteurs font imaginaires, on pourra donner à la propofée la forme que voici: $\frac{(a+bx)dx}{p^2+2pqx\cos.\zeta+q^2x^2}$. Soit encore pris pour exemple la formule différentielle $\frac{dx}{(1+x^4)^2}$. On trouvera, par les méthodes expliquées dans le Chapitre IV, qu'elle eft égale à $\frac{(1-x\sqrt{2})dx}{8(1-x\sqrt{2}+x^2)^2}$ +

$\frac{3(2-x\sqrt{2})dx}{16(1-x\sqrt{2}+x^2)}+\frac{(1+x\sqrt{2})dx}{8(1+x\sqrt{2}+x^2)^2}+$
$\frac{3(2+x\sqrt{2})dx}{16(1+x\sqrt{2}+x^2)}$. Donc $\int\frac{dx}{(1+x^4)^2}=$
$\frac{1}{8\sqrt{2}(1-x\sqrt{2}+x^2)}-\frac{3}{16\sqrt{2}}\log.(1-x\sqrt{2}+x^2)$
$+\frac{3\sqrt{2}}{16}A\,\text{tang.}\frac{x}{\sqrt{2}-x}-\frac{1}{8\sqrt{2}(1+x\sqrt{2}+x^2)}$
$+\frac{3}{16\sqrt{2}}\log.(1+x\sqrt{2}+x^2)+\frac{3\sqrt{2}}{16}$
$A\,\text{tang.}\frac{x}{\sqrt{2}+x}$. Mais le rayon étant pris pour l'unité, on a tang. $(y+z)=\frac{\text{tang.}\,y+\text{tang.}\,z}{1-\text{tang.}\,y\,\text{tang.}\,z}$; donc $A\,\text{tang.}\frac{x}{\sqrt{2}+x}+A\,\text{tang.}\frac{x}{\sqrt{2}-x}=A\,\text{tang.}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$;
& l'intégrale complette demandée est $c+\frac{x}{4(1+x^4)}$
$+\frac{3}{16\sqrt{2}}\log.\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}+\frac{3\sqrt{2}}{16}A\,\text{tang.}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.
Il feroit inutile d'ajouter un plus grand nombre d'exemples, après les détails où nous sommes entrés dans le Chapitre cité; nous passerons à la maniere de rendre rationnelles les formules différentielles qui ne le sont pas, en avertissant qu'il ne nous sera pas possible de nous étendre beaucoup sur cette partie importante de la méthode des quadratures qui n'est encore que très-peu avancée.

On propose de rendre rationnelle la formule $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}}$. Premierement les facteurs de $a+bx+cx^2$ font inégaux, mais réels & représentés par $e+fx$, $g+hx$; on fera $(e+fx)(g+hx)=$

$(e+fx)^2 z^2$, d'où il sera facile de tirer $x = -\frac{ez^2 - g}{fz^2 - h}$, $dx = \frac{2(eh-fg)z\,dz}{(fz^2-h)^2}$, $\sqrt{[(e+fx)(g+hx)]} = -\frac{(eh-fg)z}{fz^2-h}$, & par conséquent $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}} = \frac{-2dz}{fz^2-h}$. Si f & h ont le même signe, cette formule rationnelle pourra être changée en celle-ci $\frac{1}{\sqrt{h}}\left(\frac{dz}{z\sqrt{f}+\sqrt{h}} - \frac{dz}{z\sqrt{f}-\sqrt{h}}\right)$, qui a pour intégrale complette $\frac{1}{\sqrt{hf}}\log.\frac{z\sqrt{f}+\sqrt{h}}{z\sqrt{f}-\sqrt{h}}+c$; ou mettant pour z sa valeur $\frac{\sqrt{(g+hx)}}{\sqrt{(e+fx)}}$, on trouvera pour l'intégrale complette demandée, $\frac{1}{\sqrt{hf}}$ $\log.\frac{\sqrt{f}\sqrt{(g+hx)}+\sqrt{h}\sqrt{(e+fx)}}{\sqrt{f}\sqrt{g+hx)}-\sqrt{h}\sqrt{(e+fx)}}+c$. Si les deux lettres f & h ont différens signes, la formule rationnelle $\frac{-2dz}{fz^2-h}$ aura pour intégrale $\frac{2}{\sqrt{(-hf)}}$ A tang. $z\sqrt{\frac{-f}{h}}$; & on aura pour l'intégrale complette demandée $\frac{2}{\sqrt{-hf}}A$ tang. $\frac{\sqrt{-f}\sqrt{(g+hx)}}{\sqrt{h}\sqrt{(e+fx)}}+c$.

Mais les deux facteurs de $a+bx+cx^2$ peuvent être imaginaires; dans ce cas on donnera à ce trinome la forme que voici p^2+2pqx cos. $\zeta+q^2x^2$; & supposant cette derniere quantité égale à $(pz+qx)^2$, on aura $x = \frac{p(1-z^2)}{2q(z-\text{cos.}\zeta)}$, $dx =$

$\frac{-pd\zeta(1-2\zeta\,\text{cof.}\,\epsilon+\zeta^2)}{2q(\zeta-\text{cof.}\,\epsilon)^2}$. Donc dans le cas de deux facteurs imaginaires, $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}}$ devient $\frac{-d\zeta}{q(\zeta-\text{cof.}\,\epsilon)}$, & a pour intégrale complette $\frac{-1}{q}$ log. $(\zeta-\text{cof.}\,\epsilon)+c=\frac{-1}{q}$ log. $\frac{\sqrt{(p^2+2pqx\,\text{cof.}\,\epsilon+q^2x^2)}-qx-p\,\text{cof.}\,\epsilon}{p}+c$.
Il eſt clair que par les mêmes ſubſtitutions on rendra rationnelle toute formule qui ne renfermera que des quantités radicales de cette forme $\sqrt{(a+bx+cx^2)}$. Ainſi on pourra toujours rendre rationnelle la formule $Kx^{ir-1}dx(n+px^r+qx^{2r})^{\frac{s}{2}}$, ſi i & s ſont des nombres entiers poſitifs ou négatifs; car en faiſant $x^r=u$, cette formule devient $\frac{K}{r}u^{i-1}du(n+pu+qu^2)^{\frac{s}{2}}$, qui ne peut renfermer d'autre quantité radicale que $\sqrt{(n+pu+qu^2)}$.

On demande les cas où il eſt poſſible de rendre rationnelle la formule $Kx^m dx(p+qx^r)^s$? Si s eſt un nombre entier quelconque ou zero, il ſuffira de ſuppoſer $x=y^\mu$, μ étant le commun dénominateur des deux expoſans m & r. Mais ſi s eſt un nombre fractionnaire $\frac{\sigma}{\rho}$, & qu'il ſoit queſtion de rendre rationnelle la formule $Kx^m dx(p+qx^r)^{\frac{\sigma}{\rho}}$; on fera $p+qx^r=u^\rho$, d'où $(p+qx^r)^{\frac{\sigma}{\rho}}=u^\sigma$, $x=\left(\frac{u^\rho-p}{q}\right)^{\frac{1}{r}}$,

$x^m = \left(\frac{u^\varsigma - p}{q}\right)^{\frac{m}{r}}$, $dx = \frac{\rho u^{\varsigma - 1} du}{qr}\left(\frac{u^\varsigma - p}{q}\right)^{\frac{1}{r} - 1}$, en ſubſtituant ces valeurs, la formule propoſée deviendra $\frac{K\rho}{qr} u^{\sigma + \varsigma - 1} du \left(\frac{u^\varsigma - p}{q}\right)^{\frac{m+1}{r} - 1}$, qui ſera rationnelle toutes les fois que $\frac{m+1}{r}$ ſera un nombre entier quelconque ou zero. Je donne à la même formule la forme que voici, $Kx^{m + \frac{\sigma r}{\varsigma}} dx (px^{-r} + q)^{\frac{\sigma}{\varsigma}}$; & je fais $px^{-r} + q = u^\varsigma$, d'où $(px^{-r} + q)^{\frac{\sigma}{\varsigma}} = u^\sigma$, $x = \left(\frac{p}{u^\varsigma - q}\right)^{\frac{1}{r}}$, $x^{m + \frac{\sigma r}{\varsigma}} = \left(\frac{p}{u^\varsigma - q}\right)^{\frac{m}{r} + \frac{\sigma}{\varsigma}}$, $dx = \frac{-p\rho u^{\varsigma - 1} du}{r(u^\varsigma - q)^2}\left(\frac{p}{u^\varsigma - q}\right)^{\frac{1}{r} - 1}$; ce qui la change en celle-ci $\frac{-Kp\rho u^{\sigma + \varsigma - 1} du}{r(u^\varsigma - q)^2}\left(\frac{p}{u^\varsigma - q}\right)^{\frac{m+1}{r} + \frac{\sigma}{\varsigma} - 1}$, qui eſt rationnelle ſi $\frac{m+1}{r} + \frac{\sigma}{\rho}$ eſt un nombre entier quelconque ou zero.

Ainſi on rendra rationnelle la formule $\frac{dx}{\sqrt{(p^2 + x^2)}}$, en faiſant $p^2 x^{-2} + 1 = u^2$; & on la changera en celle-ci $\frac{-du}{u^2 - 1}$, dont l'intégrale complette eſt $\frac{1}{2}\log.\frac{u+1}{u-1} + c = \frac{1}{2}\log.\frac{\sqrt{(p^2 + x^2)} + x}{\sqrt{(p^2 + x^2)} - x} + c$. Si j'euſſe fait $\sqrt{(p^2 + x^2)} = x + u$; j'aurois chan-

gé la formule proposée en celle-ci $\frac{-du}{u}$; & j'aurois trouvé pour l'intégrale complette demandée $-\log. [\sqrt{(p^2+x^2)}-x]+c'$, ou $\log. \frac{1}{\sqrt{(p^2+x^2)}-x}+c'$. En déterminant la constante arbitraire par la condition que l'intégrale soit nulle lorsque $x=0$, on trouve $\int \frac{dx}{\sqrt{(p^2+x^2)}} = \frac{1}{2}\log. \frac{\sqrt{(p^2+x^2)}+x}{\sqrt{(p^2+x^2)}-x} = \log. \frac{p}{\sqrt{(p^2+x^2)}-x} = \log. \frac{\sqrt{(p^2+x^2)}+x}{p}$. Par ces deux mêmes transformations, on rendra rationnelle la formule $Kx^4 dx \sqrt{(p^2+x^2)}$. Car si l'on fait $p^2 x^{-2}+1=u^2$, elle devient $\frac{-Kp^6u^2du}{(u^2-1)^4}$; & si l'on fait $\sqrt{(p^2+x^2)}=x+u$, on la change en celle-ci $\frac{-Kdu}{u}\left(\frac{p^2+u^2}{2u}\right)^2\left(\frac{p^2-u^2}{2u}\right)^4$.

La formule $Kx^m dx \left(\frac{p+qx^r}{p'+q'x^r}\right)^{\frac{\sigma}{\varrho}}$ étant proposée; on fera $\frac{p+qx^r}{p'+q'x^r}=u^\varrho$, d'où $\left(\frac{p+qx^r}{p'+q'x^r}\right)^{\frac{\sigma}{\varrho}}=u^\sigma$, $x=\left(\frac{p'u^\varrho-p}{q-q'u^\varrho}\right)^{\frac{1}{r}}$, $x^m=\left(\frac{p'u^\varrho-p}{q-q'u^\varrho}\right)^{\frac{m}{r}}$, $dx = \frac{\varrho}{r}\left(\frac{p'u^\varrho-p}{q-q'u^\varrho}\right)^{\frac{1}{r}-1}\left(\frac{p'u^{\varrho-1}du}{q-q'u^\varrho}+\frac{q'(p'u^\varrho-p)u^{\varrho-1}du}{(q-q'u^\varrho)^2}\right)$; & comme par ces substitu-

tions cette formule devient $\frac{K\rho u^{\sigma+\varrho-1}du}{r(q-q'u^{\varrho})}$ $\left(\frac{p'u^{\varrho}-p}{q-q'u^{\varrho}}\right)^{\frac{m+1}{r}-1}\left(p'+\frac{q'(p'u^{\varrho}-p)}{q-q'u^{\varrho}}\right)$, on voit qu'elle fera rationnelle toutes les fois qu'on aura pour $\frac{m+1}{r}$ un nombre entier quelconque ou zero.

67. Ainsi dans la méthode des quadratures, on se propose pour but principal de ramener une différentielle proposée à quelqu'autre différentielle que l'on sache intégrer. Soient, par exemple, ces deux formules différentielles $hx^m dx(p+qx^r)^s$ & $ix^n dx(p+qx^r)^s$; on demande quand il est possible de faire dépendre l'intégrale de l'une de l'intégrale de l'autre; ou, ce qui revient au même, quand on peut supposer que $\int hx^m dx(p+qx^r)^s = \Psi + K\int x^n dx(p+qx^r)^s$, Ψ étant une fonction algébrique de x & de constantes, & K un coefficient constant quelconque.

On tire de cette équation $d\Psi = (hx^m - Kx^n)(p+qx^r)^s dx$; & il est clair que Ψ ne peut être égal qu'à $(p+qx^r)^{s+1}$ multiplié par une suite finie de cette forme, $Ax^\lambda + Bx^{\lambda+\mu} + Cx^{\lambda+2\mu} +$ &c, A, B, C, &c étant des coefficiens constans, & λ, μ des nombres quelconques. Je supposerai donc $\int hx^m dx(p+qx^r)^s = (p+qx^r)^{s+1}(Ax^\lambda + Bx^{\lambda+\mu} + Cx^{\lambda+2\mu} + \ldots\ldots + Hx^{\lambda+\theta\mu}) + K\int x^n dx(p+qx^r)^s$. Après avoir différentié cette équation, je divise tous les termes par $dx(p+qx^r)^s$, & je fais pour abréger $(s+1)r = \varrho$; ce qui me donne $hx^m = (\lambda+\varrho)qAx^{\lambda+r-1} + (\lambda+\mu+\varrho)qBx^{\lambda+\mu+r-1} + (\lambda+2\mu+\varrho)qCx^{\lambda+2\mu+r-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (\lambda+\theta\mu+\varrho)qHx^{\lambda+\theta\mu+r-1} + \lambda pAx^{\lambda-1} +$

$(\lambda+\mu)pBx^{\lambda+\mu-1}+(\lambda+2\mu)pCx^{\lambda+2\mu-1}+\ldots\ldots+(\lambda+\theta\mu)pHx^{\lambda+\theta\mu-1}+Kx^{n}$. J'ordonne cette équation identique comme il suit :

$$\left\{\begin{array}{lllll}(\lambda+\rho)qAx^{\lambda+r-1} & +(\lambda+\mu+\rho)qBx^{\lambda+\mu+r-1} & +(\lambda+2\mu+\rho)qCx^{\lambda+2\mu+r-1} & +\ldots \\ \quad * & +\lambda pAx^{\lambda-1} & +(\lambda+\mu)pBx^{\lambda+\mu-1} & +\ldots \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ll}+(\lambda+\theta\mu+\rho)\;qHx^{\lambda+\theta\mu+r-1} & \quad ** \\ +(\lambda+(\theta-1).\mu)pGx^{\lambda+(\theta-1).\mu-1} & +(\lambda+\theta\mu)pHx^{\lambda+\theta\mu-1}\end{array}\right\}=0;$$

j'ai laissé deux places vacantes, l'une marquée *, l'autre marquée **, pour y pouvoir placer alternativement les termes $-hx^{m}$ & Kx^{n}. Si je mets le premier à la place marquée *, & l'autre à la place marquée **, j'aurai $\lambda+r-1=m$, $\mu+r=0$, $\lambda+\theta\mu-1=n$; d'où l'on tire $\lambda=m-r+1$, $\mu=-r$ & $\theta+1=\frac{m-n}{r}$. Or $\frac{m-n}{r}$ étant l'expression du nombre des termes de la série $Ax^{\lambda}+$&c, doit être un nombre entier positif; & dans ce cas on a, pour déterminer les coefficiens, cette suite d'équations (a).....$(\lambda+\rho)qA=h$, $(\lambda+\mu+\rho)qB+\lambda pA=0$, $(\lambda+2\mu+\rho)qC+(\lambda+\mu)pB=0$;........$(\lambda+\theta\mu+\rho)qH+(\lambda+(\theta-1).\mu)pG=0$, $K+(\lambda+\theta\mu)pH=0$. Je mets le terme Kx^{n} à la place marquée *, & le terme $-hx^{m}$ à la place marquée **; cela me donne $\lambda+r-1=n$, $\mu+r=0$, $\lambda+\theta\mu-1=m$; d'où l'on tire $\lambda=n-r+1$, $\mu=-r$ & $\theta+1=\frac{n-m}{r}$. Ainsi $\frac{n-m}{r}$ doit être un nombre entier positif; & dans ce second cas, on a pour déterminer les coefficiens cette suite d'équations (b).......$(\lambda+\rho)qA+K=0$, $(\lambda+\mu+\rho)qB+\lambda pA=0$, $(\lambda+2\mu+\rho)qC+(\lambda+\mu)pB=0$,........$(\lambda+\theta\mu+\rho)qH+(\lambda+(\theta-1).\mu)pG=0$, $(\lambda+\theta\mu)pH=h$.

On peut ordonner la même équation identique de cette autre maniere :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda p A x^{\lambda-1} + (\lambda+\mu) p B x^{\lambda+\mu-1} + (\lambda+2\mu) p C x^{\lambda+2\mu-1} + \ldots\ldots \\ {}^{*} \qquad\qquad + (\lambda+\rho) q A x^{\lambda+r-1} + (\lambda+\mu+\rho) q B x^{\lambda+\mu+r-1} + \ldots\ldots \\ + \qquad (\lambda+\theta\mu) p H x^{\lambda+\theta\mu-1} \qquad\qquad {}^{**} \\ + (\lambda+(\theta-1).\mu+\rho) q G x^{\lambda+(\theta-1).\mu+r-1} + (\lambda+\theta\mu+\rho) q H x^{\lambda+\theta\mu+r-1} \end{array}\right\} =$$

en conservant toujours deux places pour y mettre alternativement les termes $-hx^m$ & Kx^n. Si je mets $-hx^m$ à la place marquée *, & Kx^n à l'autre place, j'aurai $\lambda - 1 = m$, $\mu = r$, $\lambda + \theta\mu + r - 1 = n$; d'où l'on tire $\theta + 1 = \frac{n-m}{r}$, qui est l'une des conditions qu'on a déja trouvées. Cet arrangement donne alors pour déterminer les coefficiens, cette suite d'équations (c) .... $\lambda p A = h$, $(\lambda + \mu] p B + (\lambda + \varrho) q A = 0$, $(\lambda + 2\mu) p C + (\lambda + \mu + \varrho) q B = 0$ .... $(\lambda + \theta\mu) p H + (\lambda + (\theta - 1) . \mu + \varrho) q G = 0$, $K + (\lambda + \theta\mu + \varrho) q H = 0$, qui ne diffèrent pas des équations b, comme il sera facile de s'en assurer en substituant dans les unes & dans les autres, pour $\theta + 1$ sa valeur $\frac{n-m}{r}$. En mettant Kx^n à la place marquée * & $-hx^m$ à l'autre place, on trouve $\lambda - 1 = n$, $\mu = r$ & $\lambda + \theta\mu + r - 1 = m$, d'où l'on tire $\theta + 1 = \frac{m-n}{r}$, qui est l'autre des conditions qu'on a déja trouvées; & on aura pour déterminer les coefficiens dans ce cas-ci une suite d'équations qui seront les mêmes que les équations a. Ainsi ce second arrangement ne nous apprend rien de plus que le précédent; & le Probléme n'est possible que

lorsque l'une de ces deux quantités $\frac{m-n}{r}$ ou $\frac{n-m}{r}$ est un nombre entier positif.

Si $\frac{m-n}{r}=\theta+1$, & est par conséquent un nombre entier positif, les équations a donnent

$$A=\frac{h}{(m+sr+1)q}, B=-\frac{(m-r+1)pA}{(m+(s-1).r+1)q};$$

$$C=-\frac{(m-2r+1)pB}{(m+(s-2).r+1)q}\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$H=-\frac{(m-\theta r+1)pG}{(m+(s-\theta).r+1)q}$, $K=-(m-(\theta+1)r+1)pH$; & $(A)\ldots\int hx^m dx(p+qx^r)^s=$

$$(p+qx^r)^{s+1}\left(\frac{hx^{m-r+1}}{(m+sr+1)q}-\frac{(m-r+1)p(1)}{(m+(s-1).r+1)qx^r}-\frac{(m-2r+1)p(2)}{(m+(s-2).r+1)qx^r}-\ldots\ldots\ldots\ldots-\frac{(m-\theta r+1)p(\theta)}{(m+(s-\theta).r+1)qx^r}\right)\pm$$

$$\frac{(m-r+1)(m-2r+1)\ldots\ldots(m-(\theta+1).r+1)}{(m+sr+1)(m+(s-1).r+1)\ldots(m+(s-\theta).r+1)}h\left(\frac{p}{q}\right)^{\theta+1}\int x^n dx(p+qx^r)^s.$$

Si $\frac{n-m}{r}=\theta+1$, & est par conséquent un nombre entier positif, les équations c donnent $A=\frac{h}{(m+1)p}$, $B=-\frac{(m+(s+1).r+1)qA}{(m+r+1)p}$,

$$C=-\frac{(m+(s+2).r+1)qB}{(m+2r+1)p},\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$H = -\frac{(m+(s+\theta).r+1)qG}{(m+\theta r+1)p}$, $K = -(m+(s+\theta+1).r+1)qH$; & (B).

$$\int hx^m dx(p+qx^r)^s = (p+qx^r)^{s+1}\left(\frac{hx^{m+1}}{(m+1)p} - \frac{(m+(s+1).r+1)qx^r(1)}{(m+r+1)p} - \frac{(m+(s+2).r+1)qx^r(2)}{(m+2r+1)p} - \ldots\ldots\ldots - \frac{(m+(s+\theta).r+1)qx^r(\theta)}{(m+\theta r+1)p}\right) \pm \frac{(m+(s+1).r+1)(m+(s+2)(r+2)\ldots(m+(s+\theta+1).r+1)}{(m+1)(m+r+1)\ldots\ldots\ldots(m+\theta r+1)} h\left(\frac{q}{p}\right)^{\theta+1}\int x^n dx(p+qx^r)^s.$$

Dans l'une & l'autre formule, (1) marque le premier terme de la ſuite finie, (2) le ſecond, &c; & quant au dernier terme de chacune, il aura le ſigne + ou le ſigne —, ſelon que $\theta+1$ ſera pair ou impair.

Nous trouverons, par exemple, que l'intégrale de $\frac{x^{2e}dx}{\sqrt{(1\pm x^2)}}$, e étant un nombre entier poſitif, dépend de celle de $\frac{dx}{\sqrt{(1\pm x^2)}}$, que l'on ſait être log. $(x+\sqrt{(1+x^2)})$ lorſque x^2 a le ſigne +, & A ſin. x lorſque x^2 a le ſigne —, En effet $\frac{m-n}{r}$, étant égal à e, eſt un nombre entier poſitif; on fera uſage de la premiere formule, & on aura

$$\int\frac{x^{2e}dx}{\sqrt{(1\pm x^2)}} = \sqrt{(1\pm x^2)}\left(\frac{x^{2e-1}}{\pm 2e} - \frac{(2e-1)x^{2e-3}}{2e(2e-2)} + \frac{(2e-1)(2e-3)x^{2e-5}}{\pm 2e(2e-2)(2e-4)}\ldots\right)$$

$\pm$

$$\pm \frac{(2e-1)(2e-3)\ldots\ldots(1)}{2e(2e-2)(2e-4)\ldots(2)}(\pm 1)^e\int\frac{dx}{\sqrt{(1\pm x^2)}}.$$

Si $e=1$, la propoſée eſt $\frac{x^2dx}{\sqrt{(1\pm x^2)}}$, qui a pour intégrale complette $\pm\frac{x}{2}\sqrt{(1\pm x^2)}\mp\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1\pm x^2)}}+c$; ſi $e=2$, la propoſée eſt $\frac{x^4dx}{\sqrt{(1\pm x^2)}}$, qui a pour intégrale complette $\left(\frac{x^3}{\pm 4}-\frac{3x}{2.4}\right)\sqrt{(1\pm x^2)}+\frac{1.3}{2.4}\int\frac{dx}{\sqrt{(1\pm x^2)}}+c$; &c.

En faiſant uſage de la ſeconde formule, nous trouverons que l'intégrale de $\frac{dx}{x^{2e+1}\sqrt{(1\pm x^2)}}$, e étant toujours un nombre entier poſitif, dépend de celle de $\frac{dx}{x\sqrt{(1\pm x^2)}}$ que l'on fait être $\frac{1}{2}\log.\frac{\pm\sqrt{(1\pm x^2)}\mp 1}{\sqrt{(1\pm x^2)}+1}$. En effet, $\frac{n-m}{r}$ étant égal à e, eſt un nombre entier poſitif; & on a

$$\int\frac{dx}{x^{2e+1}\sqrt{(1\pm x^2)}}=\sqrt{(1\pm x^2)}\Big[-\frac{x^{-2e}}{2e}\pm\frac{(2e-1)x^{-2e+2}}{2e(2e-2)}-\frac{(2e-1)(2e-3)x^{-2e+4}}{2e(2e-2)(2e-4)}\ldots\ldots\Big]\pm\frac{(2e-1)(2e-3)\ldots\ldots\ldots(1)}{2e(2e-2)(2e-4)\ldots\ldots(2)}(\pm 1)^e\int\frac{dx}{x\sqrt{(1\pm x^2)}}.$$

Si $e=1$, la propoſée devient $\frac{dx}{x^3\sqrt{(1+x^2)}}$, & a pour intégrale complette $-\frac{\sqrt{(1\pm x^2)}}{2x^2}\mp\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{(1\pm x^2)}}+c$; ſi $e=2$, la propoſée devient $\frac{dx}{x^5\sqrt{(1\pm x^2)}}$, & a pour intégrale complette $\sqrt{(1\pm x^2)}\left(-\frac{x^{-4}}{4}\pm\frac{1.3x^{-2}}{2.4}\right)+\frac{1.3}{2.4}\int\frac{dx}{x\sqrt{(1\pm x^2)}}+c$; &c.

Il pourroit arriver que $\frac{m-n}{r}$ étant un nombre entier poſitif, & $\frac{m+1}{r}+s$ un nombre entier poſitif ou zero; ou que $\frac{n-m}{r}$ étant un nombre entier poſitif, & $\frac{m+1}{r}$ un nombre entier négatif ou zero, un des termes de la ſuite finie fût $\frac{1}{0}$ ou infini, & que le Problême ne fût pas réſolu. Par exemple, on verra aiſément que $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ ne peut pas dépendre de $\frac{dx}{x^4\sqrt{(1-x^2)}}$, quoiqu'on ait $m=0$, $n=-4$, $r=2$, & par conſéquent $\frac{m-n}{r}$ un nombre entier poſitif. On ſait que la premiere de ces quantités eſt la différentielle d'un arc de cercle; l'autre a pour intégrale $-\frac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{(1-x^2)}$. Mais nous avons démontré précédemment que dans les deux cas

dont il est ici question, la différentielle $hx^m dx(p+qx^r)^s$ pouvoit toujours être rendue rationnelle.

Les formules A & B donnent $hx^m dx(p+qx^r)^s$ intégrable algébriquement dans les deux cas suivans. 1°. Lorsque $m-(\theta+1)r+1$ sera zero sans que $m+(s-\theta)r+1$ le soit, ou toutes les fois que s n'étant pas égal à -1, $\frac{m+1}{r}$ sera un nombre entier positif; 2°. lorsque $m+(s+\theta+1)r+1$ sera zero, sans que $m+\theta r+1$ le soit, ou toutes les fois que s n'étant point égal à -1, $\frac{m+1}{-r}-s$ sera un nombre entier positif. D'où il suit que les deux différentielles $\frac{x^{2e+1}dx}{\sqrt{(1\pm x^2)}}$ & $\frac{dx}{x^{2e}\sqrt{(1\pm x^2)}}$, e étant toujours un nombre entier positif, sont intégrables algébriquement. L'intégrale complette de la premiere est $\left(\pm\frac{x^{2e}}{2e+1}-\frac{2ex^{2e-2}}{(2e+1)(2e-1)}\pm\frac{2e(2e-2)x^{2e-4}}{(2e+1)(2e-1)(2e-3)}\ldots\right)\sqrt{(1\pm x^2)}+c$; la seconde a pour intégrale complette $\left(-\frac{x^{-2e+1}}{2e-1}\pm\frac{(2e-2)x^{-2e+3}}{(2e-1)(2e-3)}-\frac{(2e-2)(2e-4)x^{-2e+5}}{(2e-1)(2e-3)(2e-5)}\ldots\right)\sqrt{(1\pm x^2)}+c$.

Je ferai en passant une remarque qui pourra paroître intéressante. L'intégrale de $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, prise de maniere qu'elle s'évanouisse lorsque $x=0$, devient $\frac{\pi}{4}$ lorsqu'on fait $x=1$, π étant la circonférence dont le

rayon est 1; s'il étoit question de trouver ce que deviendroient $\int \frac{x^{2e}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ & $\int \frac{x^{2e+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, dans les mêmes hypothèses, les formules précédentes donneroient $\int \frac{x^{2e}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1.3.5........2e-1}{2.4.6............2e} \frac{\pi}{4}$, $\int \frac{x^{2e+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2.4.6.........2e}{3.5.7.........2e+1}$; donc $\int \frac{x^{2e}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} . \int \frac{x^{2e+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1}{2e+1} . \frac{\pi}{4}$. Soit $x = z^\lambda$; cela posé, comme λ étant positif, $x=0$ donne $z=0$, & $x=1$ donne $z=1$, on a $\lambda^2 \int \frac{z^{2e\lambda+\lambda-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2\lambda})}} . \int \frac{z^{2e\lambda+2\lambda-1}}{\sqrt{(1-z^{2\lambda})}} = \frac{1}{2e+1} . \frac{\pi}{4}$; ou (faisant $2e\lambda+\lambda-1=\mu$, d'où l'on tire $2e+1=\frac{\mu+1}{\lambda}$) $\int \frac{z^\mu dz}{\sqrt{(1-z^{2\lambda})}} . \int \frac{z^{\mu+\lambda}dz}{\sqrt{(1-z^{2\lambda})}} = \frac{1}{\lambda.(\mu+1)} . \frac{\pi}{4}$. Ainsi le produit de ces deux intégrales, prises de maniere qu'elles s'évanouissent lorsque $x=0$, devient $\frac{1}{\lambda.(\mu+1)} . \frac{\pi}{4}$ lorsqu'on fait $x=1$; & il pourroit arriver que chacune en particulier ne fût ni algébrique ni dépendante d'un arc de cercle.

Lorsque l'intégrale de $hx^m dx\,(p+qx^r)^s$ n'étant point algébrique, on voudra l'avoir en suite infinie, on pourra faire usage de ces mêmes formules qui donneront pour intégrale approchée l'une ou l'autre de ces deux suites dont on choisira la plus convergente.

(I).......$(p+qx^r)^{s+1} \left(\frac{hx^{m-r+1}}{(m+sr+1)q} - \right.$

$$\frac{(m-r+1)p(1)}{(m+(s-1).r+1)qx^r} - \frac{(m-2r+1)p(2)}{(m+(s-2).r+1)qx^r} - \&c\Big);$$

$$\text{(II)}\ldots\ldots(p+qx^r)^{s+1}\Big(\frac{hx^{m+1}}{(m+1)p} - \frac{(m+(s+1).r+1)qx^r(1)}{(m+r+1)p} - \frac{(m+(s+2).r+1)qx^r(2)}{(m+2r+1)p} - \&c\Big).$$

Mais on ne pourra pas faire uſage de la premiere ſuite, lorſque $\frac{m+1}{r}+s$ ſera un nombre entier poſitif ou zero; on ne pourra pas faire uſage de la ſeconde, lorſque $\frac{m+1}{r}$ ſera un nombre entier négatif ou zero; & on ne pourra faire uſage ni de l'une ni de l'autre lorſque les deux choſes auront lieu à la-fois. Au reſte, nous avons déja remarqué que dans tous ces cas la différentielle pouvoit être facilement rendue rationnelle. On obſervera encore que pour trouver de cette maniere les intégrales complettes, il faut, en intégrant, ajouter des conſtantes arbitraires; & lorſqu'en faiſant uſage des deux ſuites, il ſera poſſible d'avoir l'intégrale complette d'une différentielle propoſée ſous deux formes différentes, on ne ſuppoſera pas qu'elles renferment chacune la même conſtante arbitraire, car il eſt évident que les deux ſuites différent d'une quantité conſtante. Enfin, pour donner un exemple, je propoſerai de trouver en ſuite infinie l'intégrale complette de $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ qui ſera la valeur de l'arc qui a x pour ſinus, le rayon étant

égal à l'unité, si elle est prise de maniere qu'elle soit nulle lorsque $x=0$. A cause de $m=0$, $r=2$, $s=-\frac{1}{2}$, on a $\frac{m+1}{r}+s=0$, & il est clair qu'on ne peut faire usage que de la seconde suite qui donne A sin. $x=\left(x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2.4x^5}{3.5}+\&c\right)$ $\sqrt{(1-x^2)}$. Lorsque $x=1$, l'arc est de $90°$; cependant à cause de $\sqrt{(1-x^2)}=0$, on pourroit être tenté de croire que nous avons trouvé 0 pour sa valeur. Mais en y faisant plus d'attention, on verra que la suite qui a pour facteur 0, est $\frac{1}{0}$ ou infinie, & qu'ainsi nous n'avons trouvé pour l'expression de l'arc de $90°$ que $\frac{0}{0}$, ou une quantité indéterminée, ce qui n'est point absurde.

Au lieu de supposer que le binome $p+qx^r$ est élevé à la même puissance dans chacune des différentielles, nous le supposerons élevé à des puissances différentes ; & nous demanderons les conditions qui doivent avoir lieu, pour que l'équation $\int hx^m dx\,(p+qx^r)^s=(p+qx^r)^{s+1}\,\Psi+K\int x^n dx\,(p+qx^r)^t$ soit possible, par Ψ on entend une suite finie de la forme de celle dont nous avons fait usage dans le Problême précédent. En différentiant on aura, après avoir divisé par dx, & fait pour abréger $(s+1).r=\varrho$, $hx^m(p+qx^r)^s=\varrho qx^{r-1}(p+qx^r)^s\Psi+(p+qx^r)^{s+1}\frac{d\Psi}{dx}+Kx^n(p+qx^r)^t$. Maintenant ou s est plus grand, ou il est moindre que t ; s'il est plus grand, je ferai $s-t=\tau$, & je changerai l'équation précédente en celle-ci, $hx^m(p+qx^r)^\tau=\varrho qx^{r-1}(p+qx^r)^\tau\Psi+(p+qx^r)^{\tau+1}\frac{d\Psi}{dx}+Kx^n$. Soit $(p+qx^r)^{\tau+1}\Psi=\Pi$;

en subſtituant dans la derniere équation pour $(p+qx^r)^\tau\Psi$ & $(p+qx^r)^{\tau+1}\frac{d\Psi}{dx}$ leurs valeurs, je trouve, après avoir fait pour abréger $(\varrho - r.(\tau+1))q=q'$, $hx^m(p+qx^r)^{\tau+1}=q'x^{r-1}\Pi+(p+qx^r)\frac{d\Pi}{dx}+Kx^n(p+qx^r)$. Il eſt clair que pour qu'on puiſſe ſuppoſer $\Pi=Ax^\lambda+Bx^{\lambda+\mu}+Cx^{\lambda+2\mu}+\ldots\ldots+Hx^{\lambda+\theta\mu}$, il faut que τ ſoit un nombre entier poſitif, & ſi cette condition n'avoit pas lieu, le Problême propoſé ne ſeroit pas poſſible. Mais cela étant, on a $hx^m(p+qx^r)^{\tau+1}=(\alpha)\ldots\ldots hp^{\tau+1}x^m+(\tau+1).hp^\tau qx^{m+r}+\ldots\ldots+hq^{\tau+1}x^{m+(\tau+1).r}$, c'eſt le premier membre de notre transformée ; le ſecond ſera compoſé des deux ſuites $(\beta)\ldots\ldots(q'+q\lambda)Ax^{\lambda+r-1}+(q'+q.(\lambda+\mu))Bx^{\lambda+\mu+r-1}+(q'+q.(\lambda+2\mu))Cx^{\lambda+2\mu+r-1}+\ldots+(q'+q.(\lambda+\theta\mu))Hx^{\lambda+\theta\mu+r-1}$, $(\varepsilon)\ldots\ldots p\lambda Ax^{\lambda-1}+(\lambda+\mu).pBx^{\lambda+\mu-1}+(\lambda+2\mu).pCx^{\lambda+2\mu-1}+\ldots\ldots+(\lambda+\theta\mu).pHx^{\lambda+\theta\mu-1}$, & des deux termes Kpx^n+Kqx^{n+r}. Si l'on fait $\mu+r=0$, les deux ſuites β & ε n'en feront qu'une que je repréſenterai par $(\delta)\ldots\ldots A'x^{\lambda+r-1}+B'x^{\lambda-1}+\ldots\ldots+I'x^{\lambda-\theta r-1}$. J'ordonnerai la transformée $\alpha=\delta+Kpx^n+Kqx^{n+r}$, en mettant le dernier terme de la ſuite α ſous le premier de la ſuite δ & Kpx^n ſous le dernier terme de la ſuite δ, ce qui donnera $m+(\tau+1).r=\lambda+r-1$ & $\lambda-\theta r-1=n$, d'où l'on tirera $\frac{m-n}{r}+\tau+1=\theta+1$. Je mettrai le premier terme de la ſuite α ſous le dernier terme de la ſuite δ & Kqx^{n+r} ſous le premier terme de la ſuite δ, ce qui donnera $\lambda-\theta r-1=m$ & $\lambda-1=n$, d'où l'on tirera

$\frac{n-m}{r}+1=\theta+1$. Je ferai $\mu=r$, & les deux ſuites β & $\varkappa$ n'en feront qu'une que je repréſenterai par $(e) \ldots\ldots A'' x^{\lambda-1}+B'' x^{\lambda+r-1}+\ldots\ldots+ I'' x^{\lambda+(\theta+1).r-1}$. J'ordonnerai la transformée $\alpha= \epsilon+Kpx^{n}+Kqx^{n+r}$ en mettant le premier terme de la ſuite α ſous le premier terme de la ſuite e, & Kqx^{n+r} ſous le dernier terme de la ſuite e, ce qui donnera $\lambda-1=m$ & $\lambda+(\theta+1).r-1=n+r$, d'où je tirerai $\frac{n-m}{r}+1=\theta+1$, qui eſt une des conditions déja trouvées. Je mettrai le dernier terme de la ſuite α ſous le dernier terme de la ſuite e, & Kpx^{n} ſous le premier terme de la ſuite e, ce qui donnera $m+(\tau+1).r=\lambda+(\theta+1).r-1$ & $\lambda-1=n$, d'où je tirerai $\frac{m-n}{r}+\tau+1=\theta+1$, qui eſt l'autre des conditions déja trouvées. Ces deux équations $\frac{m-n}{r}+\tau+1=\theta+1$ & $\frac{n-m}{r}+1=\theta+1$ montrent que, quel que ſoit le nombre entier poſitif τ, le Problême ne ſera poſſible que lorſque la différence des deux expoſans m & n diviſée par r ſera un nombre entier, &c.

68. Nous avons ſuppoſé juſqu'ici que dans la différentielle Xdx, X étoit une fonction algébrique de x & de conſtantes; maintenant nous regarderons cette fonction comme pouvant renfermer des quantités tranſcendantes telles que des logarithmes, des arcs de cercle, &c. D'abord on propoſe d'intégrer pdx log. q, où p & q ſont deux fonctions algébriques de x & de conſtantes? Par une transformation dont nous avons ſouvent fait uſage, on trouve $\int pdx$ log. $q=$ log. $q\int pdx-\int\left(\frac{dq}{q}\int pdx\right)$. Je ſuppoſe

que par les méthodes précédentes on ait intégré pdx, & je nomme V cette intégrale; on aura $\int p\,dx \log. q = V \log. q - \int \frac{V\,dq}{q}$; & si par hasard V étoit une fonction algébrique de q ou de log. q, il ne seroit plus question que de faire en sorte d'intégrer $\frac{V\,dq}{q}$ par les mêmes méthodes. Par exemple, si la différentielle proposée étoit $x^n dx \log. x$; à cause de $p = x^n$ & de $q = x$, on auroit $V (= \int p\,dx) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ & $\int \frac{V\,dq}{q} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$. Ainsi, hors le cas de $n = -1$, $\int x^n dx \log. x = c + \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\log. x - \frac{1}{n+1}\right)$; lorsque $n = -1$, la transformation précédente donne $\int \frac{dx}{x} \log. x = (\log. x)^2 - \int \frac{dx}{x} \log. x$, & par conséquent $\int \frac{dx}{x} \log. x = c + \frac{1}{2} (\log. x)^2$.

Je prendrai pour second exemple la différentielle $\frac{dx}{1-x} \log. x$. On a $p = \frac{1}{1-x}$, $q = x$, & par conséquent $V = -\log. (1-x)$, $\int \frac{dx}{1-x} \log. x = -\log. x \log. (1-x) + \int \frac{dx}{x} \log. (1-x)$. On trouvera de la même maniere $\int \frac{dx}{x} \log. (1-x) = \log. x \log. (1-x) + \int \frac{dx}{1-x} \log. x$; & en substituant cette valeur, on tombera dans une équation identique, qui n'apprendra rien absolument. Mais si avant de faire aucune transformation, nous réduisons

$\frac{1}{1-x}$ en série, nous aurons $\frac{dx}{1-x}$ log. $x = dx$ log. $x + x\,dx$ log. $x + x^2 dx$ log. $x +$ &c, & $\int \frac{dx \log. x}{1-x} = \log. x\,(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} +$ &c$) - x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} -$ &c. On sait que $\log. \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} +$ &c; donc $\int \frac{dx \log. x}{1-x} = \log. x \log. \frac{1}{1-x} - x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} -$ &c, si cette intégrale doit être prise de maniere qu'elle s'évanouisse lorsque $x = 0$. Je fais $1 - x = y$, & j'ai $\frac{dx \log. x}{1-x} = \frac{dy}{y} \log. \frac{1}{1-y}$; d'où je tire $\int \frac{dx \log. x}{1-x} = c + y + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{16} +$ &c. Pour que cette intégrale s'évanouisse lorsque $x = 0$ ou lorsque $y = 1$, il faut faire $c = -1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} -$ &c; & on aura log. x $\log. \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} +$ &c $+ y + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{16} +$ &c $- 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} -$ &c. Lorsque $x = \frac{1}{2}$ on a aussi $y = \frac{1}{2}$; & il suit de l'équation précédente que s'il étoit possible de sommer la suite $x + \frac{x^2}{4} +$ &c dans le cas de $x = 1$, on auroit encore cette somme dans le cas de $x = \frac{1}{2}$. Or M. Jean Bernoulli a démontré que la suite $1 + \frac{1}{4} +$ &c

avoit pour ſomme la ſixiéme partie de la demi-circonférence dont le rayon eſt l'unité; voici cette démonſtration.

Nous avons vu, n°. 36, que ſin. $s = s - \frac{s^3}{2.3} + \frac{s^5}{2.3.4.5} - \frac{s^7}{2.3.4.5.6.7} +$ &c ; cette équation étant réſolue, donneroit le nombre infini d'arcs qui répondent au même ſinus. Si nous prenons ſin. $s = 0$, nous aurons le ſecond membre de l'équation $= 0$, & l'ayant diviſé par s, il viendra $1 - \frac{s^2}{2.3} + \frac{s^4}{2.3.4.5} - \frac{s^6}{2.3.4.5.6.7} + \&c = 0$, où les valeurs de s^2 ne peuvent être que les multiples de la demi-circonférence ; c'eſt-à-dire que ces valeurs ſeront $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, &c. Soit $s^2 = \frac{1}{u}$, notre équation deviendra $1 - \frac{1}{2.3.u} + \frac{1}{2.3.4.5.u^2} - \frac{1}{2.3.4.5.6.7.u^3} + \&c = 0$; or ſi nous multiplions tous les termes par la plus haute puiſſance de u, nous aurons une équation dont le ſecond terme aura pour coefficient $\frac{-1}{2.3}$; mais par la nature des équations, ce coefficient, pris avec un ſigne contraire, eſt égal à la ſomme de toutes les racines; donc $\frac{1}{6} = 1 : \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 1 : \pi^2 + 1 : (\frac{3}{2}\pi)^2 + 1 : 4\pi^2 + \&c$, d'où l'on tire, en multipliant les deux nombres par $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, $\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c$. Le coeffi-

cient du troisiéme terme, c'est-à-dire $\frac{1}{2.3.4.5}$, est égal à la somme des produits qu'on peut former en multipliant toutes les racines deux à deux, c'est-à-dire qu'on aura, comme on peut s'en assurer par un calcul fort simple, $1:\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 + 1:\pi^4 + 1:(\frac{3}{2}\pi)^4 + 1:16\pi^4 + \&c = (\frac{1}{6})^2 - \frac{2}{2.3.4.5} = \frac{1}{90}$, & par conséquent $\frac{1}{90}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c.$ En faisant sur les autres coefficiens des remarques analogues & fondées sur la nature des équations, on parviendra à démontrer que la suite infinie $1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \&c$, n étant un nombre entier positif, a pour somme $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}$ multiplié par un nombre rationnel. Il est donc démontré que la suite infinie $x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \&c$, est sommable dans les deux cas de $x = 1$ & de $x = \frac{1}{2}$; elle a pour somme dans le premier, $\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, & dans le second, $\frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(\log.2)^2$. Telle suite qui n'est pas sommable, telle différentielle qui n'est point intégrable, pour toutes les valeurs de la variable, pourroient l'être pour quelques valeurs particulieres; & il y a un très-grand nombre de questions importantes dont la solution dépend de semblables recherches.

On demande d'intégrer $(\log. x)^n dp$, où p eſt une fonction de x & de conſtantes? On a $\int(\log. x)^n dp = p(\log. x)^n - \int\frac{npdx}{x}(\log. x)^{n-1}$. J'intégre $\frac{pdx}{x}$ & je nomme V cette intégrale, il ſuit de-là que $\int\frac{pdx}{x}(\log. x)^{n-1} = V(\log. x)^{n-1} - (n-1)\int\frac{Vdx}{x}(\log. x)^{n-2}$. Nous trouverons de la même maniere, en nommant V' l'intégrale de $\frac{Vdx}{x}$; $\int\frac{Vdx}{x}(\log. x)^{n-2} = V'(\log. x)^{n-2} - (n-2)\int\frac{V'dx}{x}(\log. x)^{n-3}$; en nommant V'' l'intégrale de $\frac{V'dx}{x}$, $\int\frac{V'dx}{x}(\log. x)^{n-3} = V''(\log. x)^{n-3} - (n-3)\int\frac{V''dx}{x}(\log. x)^{n-4}$; & ainſi de ſuite. Donc $\int(\log. x)^n dp = p(\log. x)^n - nV(\log. x)^{n-1} + n.(n-1)V'\log. x)^{n-2} - n(n-1)(n-2)V''(\log. x)^{n-3} + \&c.$

Soit $p = x^m$; on aura $V = \frac{x^m}{m}$, $V' = \frac{x^m}{m^2}$, $V'' = \frac{x^m}{m^3}$ &c; & par conſéquent $\int(\log. x)^n x^{m-1} dx = \frac{x^m}{m}\left[(\log. x)^n - \frac{n}{m}(\log. x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2}(\log. x)^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{m^3}(\log. x)^{n-3} + \&c\right]$.

Lorſque $m = 0$, on a à intégrer $\frac{dx}{x}(\log. x)^n$, &

alors la ſuite précédente ne donne rien ; mais $\int \frac{dx}{x} (\log. x)^n = (\log. x)^{n+1} - n \int \frac{dx}{x} (\log. x)^n$; d'où l'on tire $\int \frac{dx}{x} (\log. x)^n = \frac{1}{n+1} (\log. x)^{n+1}$.

Hors l'exception dont nous venons de parler, cette ſuite donnera toujours l'intégrale, & elle ſe terminera toutes les fois que n ſera un nombre entier poſitif ; on aura dans ce cas $\int (\log. x)^n x^{m-1} dx = \frac{x^m}{m} \Big[(\log. x)^n - \frac{n}{m} (\log. x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2} (\log. x)^{n-2} + \ldots \pm \frac{1.2.3 \ldots n}{m^n} \Big]$; quant au dernier terme, il aura le ſigne + lorſque n ſera un nombre pair, & le ſigne − lorſqu'il ſera impair. En ſuppoſant que m ſoit poſitif, l'intégrale précédente eſt priſe de maniere qu'elle ſoit nulle lorſque $x = 0$; j'aurai donc $\pm \frac{1.2.3 \ldots n}{m^{n+1}}$ pour ce que devient l'intégrale de $(\log. x)^n x^{m-1} dx$, lorſqu'on fait $x = 0$, cette intégrale étant priſe de maniere qu'elle s'évanouiſſe lorſque $x = 0$, bien entendu que m eſt toujours un nombre poſitif quelconque, & n un nombre entier poſitif.

Lorſque n ſera un nombre entier négatif, ou lorſque n étant un nombre entier poſitif, on aura $\frac{p'dx}{(\log. x)^n}$; on donnera à la différentielle propoſée, la forme que voici : $p'x \frac{dx}{x(\log. x)^n}$; & comme $\int \frac{dx}{x(\log. x)^n} = \frac{-1}{(n-1)(\log. x)^{n-1}}$, on aura

$\int \frac{p'dx}{(\log. x)^n} = \frac{-p'x}{(n-1)(\log. x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}$

$\int \frac{d.p'x}{(\log. x)^{n-1}}$. Soit $d.p'x = p''dx$; il vient

$\int \frac{p''dx}{(\log. x)^{n-1}} = \frac{-p''x}{(n-2)(\log. x)^{n-2}} + \frac{1}{n-2}$

$\int \frac{d.p''x}{(\log. x)^{n-2}}$; &, faisant $d.p''x = p'''dx$;

$\int \frac{p'''dx}{(\log. x)^{n-2}} = \frac{-p'''x}{(n-3)(\log. x)^{n-3}} + \frac{1}{n-3}$

$\int \frac{d.p'''x}{(\log. x)^{n-3}}$; &c. En opérant toujours de même, on trouvera $\int \frac{dp}{(\log. x)^n} = - \frac{p'x}{(n-1)(\log. x)^{n-1}}$

$- \frac{p''x}{(n-1)(n-2)(\log. x)^{n-2}} -$

$\frac{p'''x}{(n-1)(n-2)(n-3)(\log. x)^{n-3}} - \ldots +$

$\frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1} \int \frac{p^{n'}dx}{\log. x}$. Pour rendre cela plus clair, je supposerai $p' = x^m$, d'où je tirerai $p' = mx^{m-1}$, $p'' = m^2 x^{m-1}$, $p''' = m^3 x^{m-1}$ .... $p^{n'} = m^n x^{m-1}$; & $\int \frac{x^{m-1}dx}{(\log. x)^n} = - \frac{x^m}{(n-1)(\log. x)^{n-1}}$

$- \frac{mx^m}{(n-1)(n-2)(\log. x)^{n-2}} -$

$\frac{m^2 x^m}{(n-1)(n-2)(n-3)(\log. x)^{n-3}} - \ldots +$

$\frac{m^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1} \int \frac{x^{m-1}dx}{\log. x}$. Si $n = 2$;

$\int \frac{x^{m-1}dx}{(\log. x)^2} = - \frac{x^m}{\log. x} + m \int \frac{x^{m-1}dx}{\log. x}$. Si $n = 3$,

$\int \frac{x^{m-1}dx}{(\log. x)^3} = -\frac{x^m}{2(\log. x)^2} - \frac{mx^m}{1.2 \log. x} + \frac{m^2}{1.2}$. $\int \frac{x^{m-1}dx}{\log. x}$; &c. Mais on ne ſait intégrer la différentielle $\frac{x^{m-1}dx}{\log. x}$ que dans le cas de $m=0$, elle eſt alors $\frac{dx}{x \log. x}$, & a pour intégrale log. log. x. Lorſque m n'eſt pas zero, ſoit $x^m = u$, d'où l'on tire $\log. x = \frac{\log. u}{m}$, & $\frac{x^{m-1}dx}{\log. x} = \frac{du}{\log. u}$; il ſeroit important de pouvoir intégrer cette différentielle en apparence ſi ſimple, autrement que par une ſuite infinie; mais on n'y eſt point parvenu juſqu'ici. En faiſant log. $u = z$, d'où l'on tire $u = e^z$, e étant le nombre dont le logarithme eſt l'unité, $du = e^z dz$, on transformera la différentielle $\frac{du}{\log. u}$ en celle-ci $e^z \frac{dz}{z}$, qu'on réduira en ſérie de la maniere ſuivante. Ayant trouvé (n°. 36) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} +$ &c, on a $\int e^z \frac{dz}{z} = c + \log. z + z + \frac{z^2}{2.2} + \frac{z^3}{2.3.3} +$ &c, & mettant pour z, log. u, $\int \frac{du}{\log. u} = c' + \log. \log. u + \log. u + \frac{1}{2.2}(\log. u)^2 + \frac{1}{2.3.3}(\log. u)^3 +$ &c; on ne pourra pas déterminer la conſtante arbitraire d'après les ſuppoſitions que l'intégrale diſparoiſſe lorſque $u=0$, ou lorſque $u=1$.

Si l'on propoſe d'intégrer $pa^u dx$, où p eſt une fonction

fonction quelconque de x; à cause de $\int a^x dx = \frac{1}{\log. a} a^x$, on donnera à cette différentielle la forme que voici, $bpd.a^x$, en faisant pour abréger $\frac{1}{\log. a}=b$. On supposera $dp=p'dx$, $dp'=p''dx$, $dp''=p'''dx$, &c, & on trouvera $\int pa^x dx = bpa^x - b\int p'a^x dx = bpa^x - b^2p'a^x + b^2\int p''a^x dx = bpa^x - b^2p'a^x + b^3p''a^x - b^3\int p'''a^x dx \ldots\ldots\ldots$ En continuant toujours de même, on arrivera enfin à cette équation $\int pa^x dx = ba^x(p - bp' + b^2p'' - b^3p''' + \ldots\ldots \pm b^n p^{n'}) \mp b^{n+1}\int p^{(n+1)'} a^x dx$; il faut entendre que la formule intégrale $\int p^{(n+1)'} a^x dx$ est la plus simple que l'on puisse trouver de cette maniere. Si $p=x^n$ (n étant un nombre entier positif ou zero), $p'=nx^{n-1}$, $p''=n.(n-1).x^{n-2} \ldots\ldots p^{n'}=n.(n-1).(n-2)\ldots 1$, $p^{(n+1)'}=0$; & on aura $\int a^x x^n dx = ba^x(x^n - bnx^{n-1} + b^2.n.(n-1).x^{n-2} - b^3 n.(n-1).(n-2).x^{n-3} + \ldots\ldots \pm b^n n.(n-1).(n-2)\ldots 1) + c$. On peut transformer la formule proposée de cette autre maniere, $\int a^x.pdx = a^x\int pdx - \log. a . \int(a^x dx\int pdx)$. Soit $\int pdx=V$, $\int Vdx=V'$, $\int V'dx=V''$, &c; on aura $\int a^x pdx = Va^x - \log. a . V'a^x + (\log. a)^2 V''a^x -$ &c. Ainsi cette transformation suppose que l'on puisse intégrer pdx, Vdx, &c; nous allons en faire usage pour résoudre le cas où la différentielle proposée seroit $\frac{a^x dx}{x^n}$, n étant un nombre entier positif. Nous aurons $V = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$ & $\int\frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\log. a}{n-1}\int\frac{a^x dx}{x^{n-1}} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}}$

$+\frac{\log. a}{n-1}.\left(-\frac{a^x}{(n-2)x^{n-2}}+\frac{\log. a}{n-2}\right.$ $\left.\int\frac{a^x dx}{x^{n-2}}\right)$. . . . . En continuant toujours de même, nous ferons dépendre l'intégrale demandée de celle-ci $\int a^x\frac{dx}{x}$ qui réduite en suite infinie, est égale à $c+\log. x+x\log. a+\frac{x^2(\log. a)^2}{2.2}+\frac{x^3(\log. a)^3}{2.3.3}+$ &c. Mais ni l'une ni l'autre transformation ne pourra donner l'intégrale de $a^x x^n dx$, autrement que par une suite infinie, lorsque n sera un nombre fractionnaire. Si, par exemple, $n=-\frac{1}{2}$, la premiere donne pour l'intégrale complette de $\frac{a^x dx}{\sqrt{x}}$, $c+\frac{ba^x}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{b}{2x}+\frac{3b^2}{4x^2}+\frac{3.5b^3}{8x^3}+\&c\right)$; l'autre donne pour l'intégrale complette de la même différentielle, $+a^x\sqrt{x}\left(2-\frac{4x\log. a}{3}+\frac{8x^2(\log. a)^2}{3.5}+-\frac{16x^3(\log. a)^3}{3.5.7}+\&c\right)$. Je passe à l'intégration des fonctions différentielles qui renferment des arcs de cercle & leurs sinus, cosinus, &c.

69. On propose d'intégrer la différentielle pdx A sin. x, où p est une fonction quelconque de x? Soit $\int pdx=V$; on aura $\int pdx\ A$ sin. $x=VA$ sin. $x-\int\frac{Vdx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, car $d.A$ sin. $x=\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$. Si $p=x^n$, $V=\frac{x^{n+1}}{n+1}$, & $\int x^n dx\ A$ sin. $x=\frac{x^{n+1}}{n+1}$

A fin. $x - \frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$. On trouvera de la même maniere $\int p\,dx\ A$ cof. $x = VA$ cof. $x + \int\frac{Vdx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $\int p\,dx\ A$ tang. $x = VA$ tang. $x - \int\frac{Vdx}{1+x^2}$, &c; & dans le cas de $p = x^n$, on parviendra toujours à des formules intégrales dont nous nous sommes beaucoup occupés précédemment.

Pour intégrer la différentielle $d\mathcal{C}$ fin. $\mathcal{C}^n$, je la mets sous cette forme $d\mathcal{C}$ fin. $\mathcal{C}$. fin. $\mathcal{C}^{n-1}$; &, à cause de $\int d\mathcal{C}$ fin. $\mathcal{C} = -$ cof. $\mathcal{C}$, j'ai $\int d\mathcal{C}$ fin. $\mathcal{C}^n = -$ cof. $\mathcal{C}$ fin. $\mathcal{C}^{n-1} + (n-1)\int d\mathcal{C}$ cof. $\mathcal{C}^2$ fin. $\mathcal{C}^{n-2}$. En changeant cof. $\mathcal{C}^2$ en $1 -$ fin. $\mathcal{C}^2$, j'ai $\int d\mathcal{C}$ cof. $\mathcal{C}^2$ fin. $\mathcal{C}^{n-2} = \int d\mathcal{C}$ fin. $\mathcal{C}^{n-2} - \int d\mathcal{C}$ fin. $\mathcal{C}^n$; donc $\int d\mathcal{C}$ fin. $\mathcal{C}^n = -\frac{\text{cof. } \mathcal{C} \text{ fin. } \mathcal{C}^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\int d\mathcal{C}$ fin. $\mathcal{C}^{n-2}$. Je trouverai de la même maniere $\int d\mathcal{C}$ fin. $\mathcal{C}^{n-2} = -\frac{\text{cof. } \mathcal{C} \text{ fin. } \mathcal{C}^{n-3}}{n-2} + \frac{n-3}{n-2}\int d\mathcal{C}$ fin. $\mathcal{C}^{n-4}$, $\int d\mathcal{C}$ fin. $\mathcal{C}^{n-4} = -\frac{\text{cof. } \mathcal{C} \text{ fin. } \mathcal{C}^{n-5}}{n-4} + \frac{n-5}{n-4}\int d\mathcal{C}$ fin. $\mathcal{C}^{n-6}$, $\int d\mathcal{C}$ fin. $\mathcal{C}^{n-6} = -\frac{\text{cof. } \mathcal{C} \text{ fin. } \mathcal{C}^{n-7}}{n-6} + \frac{n-7}{n-6}\int d\mathcal{C}$ fin. $\mathcal{C}^{n-8}$, &c. Lorsque n est un nombre entier positif, il y a deux cas à distinguer; le premier lorsque ce nombre est pair, & où l'on a $\int d\mathcal{C}$ fin. $\mathcal{C}^n = -\frac{\text{cof. } \mathcal{C}}{n}\Big($fin. $\mathcal{C}^{n-1} + \frac{n-1}{n-2}$ fin. $\mathcal{C}^{n-3} + \frac{(n-1).(n-3)}{(n-2).(n-4)}$ fin. $\mathcal{C}^{n-5} + \frac{(n-1).(n-3).(n-5)}{(n-2).(n-4).(n-6)}$

$\text{fin.}\, \mathcal{C}^{n-7} + \ldots + \frac{(n-1).(n-3).(n-5).(n-7)\ldots 1}{(n-2).(n-4).(n-6).(n-8)\ldots 2}$

$\left.\text{fin.}\, \mathcal{C}\right) + \frac{(n-1).(n-3).(n-5).(n-7).(n-9)\ldots 1}{n.(n-2).(n-4).(n-6).(n-8)\ldots 2}.$

$\mathcal{C}$; le fecond lorfqu'il eft impair, & où l'on a $\int d\mathcal{C}$ $\text{fin.}\, \mathcal{C}^n = -\frac{\text{cof.}\, \mathcal{C}}{n}\left(\text{fin.}\, \mathcal{C}^{n-1} + \frac{n-1}{n-2}\text{fin.}\, \mathcal{C}^{n-3} + \frac{(n-1).(n-3)}{(n-2).(n-4)}\text{fin.}\, \mathcal{C}^{n-5} + \frac{(n-1).(n-3).(n-5)}{(n-2).(n-4).(n-6)}\right.$ $\left.\text{fin.}\, \mathcal{C}^{n-7} + \ldots + \frac{(n-1).(n-3).(n-5).(n-7)\ldots 2}{(n-2.(n-4).(n-6).(n-8)\ldots 1}\right)$; dans le fecond cas, l'intégrale eft donnée en finus & cofinus, au lieu que dans le premier elle renferme un arc, & eft par conféquent une quantité tranfcendante. Ainfi, par exemple, l'intégrale complette de $d\mathcal{C}\ \text{fin.}\, \mathcal{C}^5$ eft égale à $c - \frac{\text{cof.}\, \mathcal{C}}{5}\left(\text{fin.}\, \mathcal{C}^4 + \frac{4}{3}\text{fin.}\, \mathcal{C}^2 + \frac{4.2}{3.1}\right)$; celle de $d\mathcal{C}$ fin. $\mathcal{C}^6$ eft égale à $c - \frac{\text{cof.}\, \mathcal{C}}{6}\left(\text{fin.}\, \mathcal{C}^5 + \frac{5}{4}\text{fin.}\, \mathcal{C}^3 + \frac{5.3}{4.2}\text{fin.}\, \mathcal{C}\right) + \frac{5.3.1}{6.4.2}\mathcal{C}$. Les mêmes formules pourront fervir à intégrer $d\phi$ cof. ϕ^n; car en faifant $\phi = 90° - \mathcal{C}$, on a $d\phi = -d\mathcal{C}$, $\text{fin.}\, \phi = \text{cof.}\, \mathcal{C}$, $\text{cof.}\, \phi = \text{fin.}\, \mathcal{C}$, & $\int d\phi\ \text{cof.}\, \phi^n = -\int d\mathcal{C}\ \text{fin.}\, \mathcal{C}^n$. On trouvera, par exemple, que $\int d\phi\ \text{cof.}\, \phi^6 = c + \frac{\text{fin.}\, \phi}{6}\left(\text{cof.}\, \phi^5 + \frac{5}{4}\text{cof.}\, \phi^3 + \frac{5.3}{4.2}\text{cof.}\, \phi\right) - \frac{5.3.1}{6.4.2}(90° - \phi)$, ou fimplement que $\int d\phi\ \text{cof.}\, \phi^6 = c + \frac{\text{fin.}\, \phi}{6}\left(\text{cof.}\, \phi^5 + \frac{5}{4}\text{cof.}\, \phi^3 + \frac{5.3}{4.2}\text{cof.}\, \phi\right) + \frac{5.3.1}{6.4.2}\phi$.

En différentiant $\sin. \epsilon^m \cos. \epsilon^q$, je trouve $m\,d\epsilon \sin. \epsilon^{m-1} \cos. \epsilon^{q-1} \cos. \epsilon^2 - q\,d\epsilon \sin. \epsilon^2 \sin. \epsilon^{m-1} \cos. \epsilon^{q-1}$, qui devient, à cause de $\sin. \epsilon^2 + \cos. \epsilon^2 = 1$, ou $m\,d\epsilon \sin. \epsilon^{m-1} \cos. \epsilon^{q-1} - (m+q)\,d\epsilon \sin. \epsilon^{m+1} \cos. \epsilon^{q-1}$, ou $(m+q)\,d\epsilon \sin. \epsilon^{m-1} \cos. \epsilon^{q+1} - q\,d\epsilon \sin. \epsilon^{m-1} \cos. \epsilon^{q-1}$. Je tire delà ces deux formules (a). . . . $\int d\epsilon \sin. \epsilon^\lambda \cos. \epsilon^\mu = \frac{\lambda-1}{\lambda+\mu} \int d\epsilon \sin. \epsilon^{\lambda-2} \cos. \epsilon^\mu - \frac{\sin. \epsilon^{\lambda-1} \cos. \epsilon^{\mu+1}}{\lambda+\mu}$, (b). . . . $\int d\epsilon \sin. \epsilon^\lambda \cos. \epsilon^\mu = \frac{\mu-1}{\lambda+\mu} \int d\epsilon \sin. \epsilon^\lambda \cos. \epsilon^{\mu-2} + \frac{\sin. \epsilon^{\lambda+1} \cos. \epsilon^{\mu-1}}{\lambda+\mu}$. Dans les deux cas de $\lambda = 0$ ou de $\lambda = 1$, la proposée est $d\epsilon \cos. \epsilon^\mu$ ou $d\epsilon \sin. \epsilon \cos. \epsilon^\mu$; & dans les autres cas, en faisant usage de la formule a, on la fera dépendre de l'une de ces deux différentielles, pourvu que λ soit un nombre entier positif plus grand que 1; elle dépendra de la premiere lorsque λ sera pair, & de la seconde lorsqu'il sera impair. Hors le cas de $\mu = -1$, la seconde, c'est-à-dire, $d\epsilon \sin. \epsilon \cos. \epsilon^\mu$, a pour intégrale $-\frac{\cos. \epsilon^{\mu+1}}{\mu+1}$; mais dans ce cas particulier, elle devient $\frac{d\epsilon \sin. \epsilon}{\cos. \epsilon}$; & elle a pour intégrale $-\log. \cos. \epsilon$. Dans le même cas particulier de $\mu = -1$, la premiere devient $\frac{d\epsilon}{\cos. \epsilon}$, que j'intégre de la maniere suivante. Je la transforme en celle-ci, $\frac{d\epsilon \cos. \epsilon}{\cos. \epsilon^2} = \frac{d\epsilon \cos \epsilon}{1 - \sin. \epsilon^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\epsilon \cos. \epsilon}{1 + \sin. \epsilon} + \frac{d\epsilon \cos. \epsilon}{1 - \sin. \epsilon}\right)$, & je vois alors qu'elle a pour in-

tégrale $\frac{1}{2}$ log. $\frac{1+\text{fin.}\,\theta}{1-\text{fin.}\,\theta}$. Dans les deux cas de $\mu=0$ ou de $\mu=1$, $d\theta$ fin. θ^λ cof. θ^μ devient $d\theta$ fin. θ^λ ou $d\theta$ cof. θ fin. θ^λ; & dans les autres cas, en faifant ufage de la formule b, on la fera dépendre de l'une de ces deux différentielles, pourvu que μ foit un nombre entier pofitif plus grand que 1; elle dépendra de la premiere lorfque μ fera pair; & de la feconde lorfqu'il fera impair. Hors le cas de $\lambda=-1$, la feconde a pour intégrale $\frac{\text{fin.}\,\theta^{\lambda+1}}{\lambda+1}$; mais dans ce cas particulier elle devient $\frac{d\theta\,\text{cof.}\,\theta}{\text{fin.}\,\theta}$, & elle a pour intégrale log. fin. θ. Dans ce même cas particulier la premiere devient $\frac{d\theta}{\text{fin.}\,\theta}$ qu'on peut mettre fous cette forme $\frac{d\theta\,\text{fin.}\,\theta}{\text{fin.}\,\theta^2}=\frac{d\theta\,\text{fin.}\,\theta}{1-\text{cof.}\,\theta^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta\,\text{fin.}\,\theta}{1+\text{cof.}\,\theta}+\frac{d\theta\,\text{fin.}\,\theta}{1-\text{cof.}\,\theta}\right)$, & on voit alors qu'elle a pour intégrale $\frac{1}{2}$ log. $\frac{1-\text{cof.}\,\theta}{1+\text{cof.}\,\theta}$.

On tire des deux formules a & b, $\int d\theta$ fin. $\theta^{\lambda-2}$ cof. $\theta^\mu=\frac{\lambda+\mu}{\lambda-1}\int d\theta$ fin. θ^λ cof. $\theta^\mu+\frac{\text{fin.}\,\theta^{\lambda-1}\,\text{cof.}\,\theta^{\mu+1}}{\lambda-1}$ & $\int d\theta$ fin. θ^λ cof. $\theta^{\mu-2}=\frac{\lambda+\mu}{\mu-1}\int d\theta$ fin. θ^λ cof. $\theta^\mu-\frac{\text{fin.}\,\theta^{\lambda+1}\,\text{cof.}\,\theta^{\mu-1}}{\mu-1}$; on a donc en mettant dans la premiere λ pour $\lambda-2$, & dans la feconde μ pour $\mu-2$, ces deux autres formules,

(a'). . . . . . $\int d\theta$ fin. θ^λ cof. $\theta^\mu=\frac{\lambda+\mu+2}{\lambda+1}\int d\theta$

$\sin.\,\varepsilon^{\lambda+2}\cos.\,\varepsilon^{\mu}+\frac{\sin.\,\varepsilon^{\lambda+1}\cos.\,\varepsilon^{\mu+1}}{\lambda+1}$, $(b')\ldots\int d\varepsilon\,\sin.\,\varepsilon^{\lambda}\cos.\,\varepsilon^{\mu}=\frac{\lambda'+\mu+2}{\mu+1}\int d\varepsilon\,\sin.\,\varepsilon^{\lambda}\cos.\,\varepsilon^{\mu+2}-\frac{\sin.\,\varepsilon^{\lambda+1}\cos.\,\varepsilon^{\mu+1}}{\mu+1}$. Si λ eſt un nombre entier négatif plus grand que -1, en faiſant uſage de la premiere, on pourra toujours faire dépendre $d\varepsilon\,\sin.\,\varepsilon^{\lambda}\cos.\,\varepsilon^{\mu}$ de l'une de ces deux différentielles $\frac{d\varepsilon\cos.\,\varepsilon^{\mu}}{\sin.\,\varepsilon}$ & $d\varepsilon\cos.\,\varepsilon^{\mu}$; de la premiere ſi λ eſt impair, & de la ſeconde s'il eſt pair. On pourra toujours, en faiſant uſage de la ſeconde formule, faire dépendre la même différentielle de l'une de ces deux-ci, $\frac{d\varepsilon\,\sin.\,\varepsilon^{\lambda}}{\sin.\,\varepsilon}$ & $d\varepsilon\,\sin.\,\varepsilon^{\lambda}$; de la premiere lorſque μ ſera un nombre entier négatif impair plus grand que -1, de la ſeconde lorſque ce nombre entier négatif ſera pair.

En faiſant $\mu=-1$ dans l'équation a, & $\lambda=-1$ dans l'équation b, on les change en celles-ci,

$$\int\frac{d\varepsilon\,\sin.\,\varepsilon^{\lambda}}{\cos.\,\varepsilon}=\int\frac{d\varepsilon\,\sin.\,\varepsilon^{\lambda-2}}{\cos.\,\varepsilon}-\frac{\sin.\,\varepsilon^{\lambda-1}}{\lambda-1}\ \&$$

$$\int\frac{d\varepsilon\cos.\,\varepsilon^{\mu}}{\sin.\,\varepsilon}=\int\frac{d\varepsilon\cos.\,\varepsilon^{\mu-2}}{\sin.\,\varepsilon}+\frac{\cos.\,\varepsilon^{\mu-1}}{\mu-1},$$

dont la premiere nous apprend que λ étant un nombre entier poſitif, on pourra toujours ramener $\frac{d\varepsilon\,\sin.\,\varepsilon^{\lambda}}{\cos.\,\varepsilon}$ à l'une de ces deux différentielles $\frac{d\varepsilon\,\sin.\,\varepsilon}{\cos.\,\varepsilon}$ & $\frac{d\varepsilon}{\cos.\,\varepsilon}$; à la premiere lorſque λ ſera impair, à la ſeconde lorſqu'il ſera pair. On tire de la ſeconde équation que ſi μ eſt un nombre entier poſitif, on pourra

toujours ramener $\frac{d\zeta \text{ cof. } \zeta^\mu}{\text{fin. } \zeta}$ à l'une de ces deux différentielles $\frac{d\zeta \text{ cof. } \zeta}{\text{fin. } \zeta}$, $\frac{d\zeta}{\text{fin. } \zeta}$; à la premiere lorfque μ fera impair, à la feconde lorfqu'il fera pair. Si λ & μ font des nombres entiers négatifs, ou fi, m étant un nombre entier pofitif, on a les deux différentielles $\frac{d\zeta}{\text{cof. } \zeta \text{ fin. } \zeta^m}$ & $\frac{d\zeta}{\text{fin. } \zeta \text{ cof. } \zeta^m}$, on les multipliera chacune par fin. $\zeta^2 +$ cof. $\zeta^2 = 1$, & on aura ces deux-ci, $\frac{d\zeta}{\text{cof.} \zeta \text{ fin.} \zeta^{m-2}} + \frac{d\zeta \text{ cof. } \zeta}{\text{fin. } \zeta^m}$ & $\frac{d\zeta \text{ fin.} \zeta}{\text{cof. } \zeta^m} + \frac{d\zeta}{\text{fin. } \zeta \text{ cof. } \zeta^{m-2}}$. Ainfi $\frac{d\zeta}{\text{cof. } \zeta \text{ fin. } \zeta^m}$ ne dépendra jamais que d'une différentielle de cette forme $\frac{d\zeta \text{ cof. } \zeta}{\text{fin. } \zeta^m}$ & de l'une de ces deux-ci $\frac{d\zeta}{\text{cof.} \zeta}$, ou $\frac{d\zeta}{\text{cof. } \zeta \text{ fin. } \zeta}$, felon que m fera pair ou impair; de même $\frac{d\zeta}{\text{fin.} \zeta \text{ cof.} \zeta^m}$ ne dépendra jamais que d'une différentielle de cette forme $\frac{d\zeta \text{ fin. } \zeta}{\text{cof. } \zeta^m}$, & de l'une de ces deux-ci, $\frac{d\zeta}{\text{fin. } \zeta}$ ou $\frac{d\zeta}{\text{fin. } \zeta \text{ cof. } \zeta}$, felon que m fera pair ou impair. Il refte à intégrer $\frac{d\zeta}{\text{fin. } \zeta \text{ cof. } \zeta}$; mais fi on fe rappelle que fin. ζ cof. $\zeta = \frac{1}{2}$ fin. 2ζ, on verra que cette différentielle devient $\frac{2 d\zeta}{\text{fin. } 2\zeta}$, & que par conféquent elle a pour intégrale $\frac{1}{2}$ log. $\frac{1 - \text{cof. } 2\zeta}{1 + \text{cof. } 2\zeta}$.

Je fais $\mu = 0$ dans l'équation a' & $\lambda = 0$ dans l'équation b', ce qui me donne $\int d\zeta$ fin. $\zeta^{\lambda} = \frac{\lambda + 2}{\lambda + 1} \int d\zeta$ fin. $\zeta^{\lambda + 2} + \frac{\text{fin. } \zeta^{\lambda + 1} \text{ cof. } \zeta}{\lambda + 1}$ & $\int d\zeta$ cof. $\zeta^{\mu} = \frac{\mu + 2}{\mu + 1} \int d\zeta$ cof. $\zeta^{\mu + 2} - \frac{\text{fin. } \zeta \text{ cof. } \zeta^{\mu + 1}}{\mu + 1}$. L'une de ces équations fait voir que toutes les fois que λ fera un nombre entier négatif, la différentielle $d\zeta$ fin. ζ^{λ} poûrra être ramenée à l'une de ces deux-ci, $d\zeta$ & $\frac{d\zeta}{\text{fin. } \zeta}$; à la premiere lorfque λ fera pair, & à la feconde lorfqu'il fera impair. On voit par l'autre équation que toutes les fois que μ fera un nombre entier négatif, la différentielle $d\zeta$ cof. ζ^{μ} pourra être ramenée à l'une de ces deux-ci, $d\zeta$ & $\frac{d\zeta}{\text{cof. } \zeta}$; à la premiere lorfque μ fera pair, & à la feconde lorfqu'il fera impair.

Si, λ étant un nombre entier pofitif, on a $\lambda + \mu = 0$, on ne pourra pas faire ufage de la formule a, & on aura recours à la formule b' qui devient alors $\int d\zeta \left(\frac{\text{fin. } \zeta}{\text{cof. } \zeta}\right)^{\lambda} = \frac{-2}{\lambda - 1} \int \frac{d\zeta \text{ fin. } \zeta^{\lambda}}{\text{cof. } \zeta^{\lambda - 2}} + \frac{\text{fin. } \zeta \text{ cof. } \zeta}{\lambda - 1} \left(\frac{\text{fin. } \zeta}{\text{cof. } \zeta}\right)^{\lambda}$, & nous montre qu'on pourra toujours faire dépendre $d\zeta \left(\frac{\text{fin. } \zeta}{\text{cof. } \zeta}\right)^{\lambda}$, λ étant un nombre entier pofitif, de l'une de ces deux différentielles $d\zeta$ fin. ζ^{λ} ou $\frac{d\zeta \text{ fin. } \zeta^{\lambda}}{\text{cof. } \zeta}$, felon que λ fera pair ou impair. Si, μ étant un nombre entier pofitif, on a $\lambda + \mu = 0$, on ne pourra pas faire ufage de la formule b, & on aura reçours à la formule a' qui

devient alors $\int d\mathcal{E}\left(\frac{\text{cof. }\mathcal{E}}{\text{fin. }\mathcal{E}}\right)^{\mu}=\frac{-2}{\mu-1}\int\frac{d\mathcal{E}\,\text{cof. }\mathcal{E}^{\mu}}{\text{fin. }\mathcal{E}^{\mu-2}}$ $-\frac{\text{fin. }\mathcal{E}\,\text{cof. }\mathcal{E}}{\mu-1}\left(\frac{\text{cof. }\mathcal{E}}{\text{fin. }\mathcal{E}}\right)^{\mu}$, & nous montre qu'on pourra toujours faire dépendre $d\mathcal{E}\left(\frac{\text{cof. }\mathcal{E}}{\text{fin. }\mathcal{E}}\right)^{\mu}$, μ étant un nombre entier pofitif, de l'une de ces deux différentielles $d\mathcal{E}$ cof. $\mathcal{E}^{\mu}$ ou $\frac{d\mathcal{E}\,\text{cof. }\mathcal{E}^{\mu}}{\text{fin. }\mathcal{E}}$, felon que μ fera pair ou impair.

Je fuppofe $\lambda+\mu$ un nombre entier pair que je repréfenterai par $2i$, & je mets dans la formule a' pour μ fa valeur $2i-\mu$, & dans la formule b' pour μ fa valeur $2i-\lambda$, ce qui donne

$$\int d\mathcal{E}\,\text{fin. }\mathcal{E}^{2i}\left(\frac{\text{cof. }\mathcal{E}}{\text{fin. }\mathcal{E}}\right)^{\mu}=\frac{2i+2}{2i-\mu+1}\int d\mathcal{E}\,\text{fin. }\mathcal{E}^{2i+2}$$

$$\int d\mathcal{E}\,\text{cof. }\mathcal{E}^{2i}\left(\frac{\text{fin. }\mathcal{E}}{\text{cof. }\mathcal{E}}\right)^{\lambda}=\frac{2i+2}{2i-\lambda+1}\int d\mathcal{E}\,\text{cof. }\mathcal{E}^{2i+2}$$

$$\left(\frac{\text{cof. }\mathcal{E}}{\text{fin. }\mathcal{E}}\right)^{\mu}+\frac{\text{fin. }\mathcal{E}^{2i+2}}{2i-\mu+1}\left(\frac{\text{cof. }\mathcal{E}}{\text{fin. }\mathcal{E}}\right)^{\mu+1},$$

$$\left(\frac{\text{fin. }\mathcal{E}}{\text{cof. }\mathcal{E}}\right)^{\lambda}-\frac{\text{cof. }\mathcal{E}^{2i+2}}{2i-\lambda+1}\left(\frac{\text{fin. }\mathcal{E}}{\text{cof. }\mathcal{E}}\right)^{\lambda+1}.$$

Il eft clair que toutes les fois que i fera un nombre négatif, ces deux différentielles feront intégrables algébriquement ; il en faut excepter le cas de $\mu=-1$, où la premiere devient $\frac{d\mathcal{E}\,\text{fin. }\mathcal{E}^{2i+1}}{\text{cof. }\mathcal{E}}$, & celui de $\lambda=-1$, où l'autre devient $\frac{d\mathcal{E}\,\text{cof. }\mathcal{E}^{2i+1}}{\text{fin. }\mathcal{E}}$; car alors elles feront intégrables par logarithmes. En mettant dans la formule a pour λ fa valeur $2i-\mu$, & dans

la formule b pour μ sa valeur $2i-\lambda$, elles deviennent $\int d\beta \text{ sin. } \beta^{2i}\left(\frac{\text{cos. }\beta}{\text{sin. }\beta}\right)^{\mu} = \frac{2i-\mu-1}{2i}$ $\int d\beta \text{ sin. } \beta^{2i-2}\left(\frac{\text{cos. }\beta}{\text{sin. }\beta}\right)^{\mu} - \frac{\text{sin. }\beta^{2i}}{2i}\left(\frac{\text{cos. }\beta}{\text{sin. }\beta}\right)^{\mu+1}$ & $\int d\beta \text{ cos. } \beta^{2i}\left(\frac{\text{sin. }\beta}{\text{cos. }\beta}\right)^{\lambda} = \frac{2i-\lambda-1}{2i}\int d\beta$ $\text{cos. } \beta^{2i-2}\left(\frac{\text{sin. }\beta}{\text{cos. }\beta}\right)^{\lambda} + \frac{\text{cos. }\beta^{2i}}{2i}\left(\frac{\text{sin. }\beta}{\text{cos. }\beta}\right)^{\lambda+1}$; d'où l'on tire que toutes les fois que i sera un nombre positif on pourra ramener nos deux différentielles, l'une à $d\beta\left(\frac{\text{cos. }\beta}{\text{sin. }\beta}\right)^{\mu}$, l'autre à $d\beta\left(\frac{\text{sin. }\beta}{\text{cos. }\beta}\right)^{\lambda}$. Or $\frac{\text{sin. }\beta}{\text{cos. }\beta}$ étant égal à tang. β & $d\beta$ à $\frac{d.\text{tang. }\beta}{1+\text{tang. }\beta^2}$, tout se réduit à intégrer une différentielle de cette forme, $\frac{\text{tang. }\beta^{\frac{\sigma}{\varrho}}\, d.\text{tang. }\beta}{1+\text{tang. }\beta^2}$. Si ϱ est un nombre entier plus grand que 1, cette différentielle n'est point rationnelle, mais on la rendra telle en faisant tang. $\beta = x^{\varrho}$; car par cette substitution elle deviendra $\frac{\varrho x^{\sigma+\varrho-1}dx}{1+x^{2\varrho}}$.

La différentielle $d\beta$ sin. β^{λ} cos. β^{μ} étant proposée, j'aurois pu faire tout d'un coup sin. β ou cos. β égal à x, & l'ayant changée par-là en celle-ci, $x^{\lambda}dx(1-x^2)^{\frac{\mu-1}{2}}$ ou en celle-ci, $x^{\mu}dx(1-x^2)^{\frac{\lambda-1}{2}}$, j'aurois trouvé par les méthodes des n°s 66 & 67, comme par les transformations précédentes, 1°. que la proposée seroit intégrable algébriquement, si l'un des deux exposans λ ou μ étoit un nombre entier positif impair, ou si la somme des deux étoit un nombre entier négatif pair, à moins que l'un des deux

ne fût $=-1$, cas où elle dépendroit des logarithmes; 2°. que la proposée pourroit être rendue rationnelle, si l'un des deux exposans étoit un nombre entier positif ou négatif impair, ou si la somme des deux étoit un nombre entier positif ou négatif pair.

Par cette même substitution de x pour sin. C, je transformerai $\frac{d\mathsf{C}}{m+n\,\text{fin.}\,\mathsf{C}}$ en cette autre différentielle $\frac{dx}{(m+nx)\sqrt{(1-x^2)}}$, que je rendrai rationnelle en faisant $1-x^2=(1+x^2)y^2$; elle devient par cette substitution $\frac{-2dy}{m+n+(m-n)y^2}$, qui a pour intégrale $\frac{1}{\sqrt{(n^2-m^2)}}\log.\frac{\sqrt{(n^2-m^2)}-y(n-m)}{\sqrt{(n^2-m^2)}+y(n-m)}$, lorsque n est plus grand que m, & $\frac{-2}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$ A tang. $\frac{y(m-n)}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$, lorsque m est plus grand que n. Lorsque $n=m$, la proposée devient $\frac{-dy}{m}$ & a pour intégrale $-\frac{y}{m}$; donc $\int\frac{d\mathsf{C}}{1+\text{fin.}\,\mathsf{C}}=1-\frac{\text{cof.}\,\mathsf{C}}{1+\text{fin.}\,\mathsf{C}}$, cette intégrale étant prise de maniere qu'elle soit nulle lorsque $\mathsf{C}=0$. Je trouverai, en faisant cof. $\mathsf{C}=x$ & $1-x^2=(1+x)^2y^2$, que $\int\frac{d\mathsf{C}}{m+n\,\text{cof.}\,\mathsf{C}}$ est égal à $\frac{1}{\sqrt{(n^2-m^2)}}$ log. $\frac{\sqrt{(n^2-m^2)}+y(n-m)}{\sqrt{(n^2-m^2)}-y(n-m)}$, lorsque n est plus grand que m, à $\frac{2}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$ A tang. $\frac{y(m-n)}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$,

lorsque m est plus grand que n, à $\frac{y}{m}$ lorsque $n = m$. Donc $\int \frac{d\zeta}{1 + \text{cos.}\,\zeta} = \frac{\text{sin.}\,\zeta}{1 + \text{cos.}\,\zeta}$, cette intégrale étant prise de maniere qu'elle soit nulle lorsque $\zeta = 0$. En se rappellant que $d\,.\,\text{sin.}\,\zeta = d\zeta\ \text{cos.}\,\zeta$, $d\ \text{cos.}\,\zeta = -d\zeta\ \text{sin.}\,\zeta$, on verra aisément que les intégrales de $\frac{d\zeta\ \text{cos.}\,\zeta}{m + n\ \text{sin.}\,\zeta}$, $\frac{d\zeta\ \text{sin.}\,\zeta}{m + n\ \text{cos.}\,\zeta}$ sont $\frac{1}{n}\log.\frac{m + n\ \text{sin.}\,\zeta}{m}$; $\frac{1}{n}\log.\frac{m + n}{m + n\ \text{cos.}\,\zeta}$, ces intégrales étant prises de maniere qu'elles soient nulles lorsque $\zeta = 0$. Quant aux différentielles $\frac{d\zeta\ \text{sin.}\,\zeta}{m + n\ \text{sin.}\,\zeta}$, $\frac{d\zeta\ \text{cos.}\,\zeta}{m + n\ \text{cos.}\,\zeta}$, on les transformera en celles-ci, $\frac{d\zeta}{n} - \frac{m\,d\zeta}{n(m + n\ \text{sin.}\,\zeta)}$; $\frac{d\zeta}{n} - \frac{m\,d\zeta}{n(m + n\ \text{cos.}\,\zeta)}$ dont les intégrales dépendent des précédentes.

L'une de ces deux différentielles $\frac{d\zeta}{(m + n\ \text{sin.}\,\zeta)^\lambda}$ & $\frac{d\zeta}{(m + n\ \text{cos.}\,\zeta)^\lambda}$ étant intégrée, l'intégrale de l'autre s'ensuivra nécessairement. Soit proposé d'intégrer celle-ci $\frac{p\,d\zeta + q\,d\zeta\ \text{cos.}\,\zeta}{(m + n\ \text{cos.}\,\zeta)^\lambda}$, qui est plus générale, dans le cas où λ seroit un nombre entier positif. On fera $\int \frac{(p + q\ \text{cos.}\,\zeta)\,d\zeta}{(m + n\ \text{cos.}\,\zeta)^\lambda} = \frac{A.\,\text{sin.}\,\zeta}{(m + n\ \text{cos.}\,\zeta)^{\lambda - 1}} + \int \frac{(B + C\ \text{cos.}\,\zeta)\,d\zeta}{(m + n\ \text{cos.}\,\zeta)^{\lambda - 1}}$; & après avoir différentié, réduit & fait pour abréger $A + C = K$, il viendra

$p + q$ cof. $\epsilon = Bm + (Bn + Km)$ cof. $\epsilon + Kn$ cof. $\epsilon^2 + (\lambda - 1) . nA$ fin. ϵ^2. Donc, à caufe de fin. $\epsilon^2 = 1 -$ cof. ϵ^2, on aura les équations $p = Bm + (\lambda - 1) . nA$, $q = Bn + Km$, $K = (\lambda - 1) . A$; d'où il fera facile de tirer $A = \frac{qm - pn}{(\lambda - 1)(m^2 - n^2)}$, $B = \frac{pm - qn}{m^2 - n^2}$, $C = \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1} . \frac{qm - pn}{m^2 - n^2}$. De la même maniere on fera dépendre l'intégrale de $\frac{(B + C \text{ cof. } \epsilon) d\epsilon}{(m + n \text{ cof. } \epsilon)^{\lambda - 1}}$ de celle de $\frac{(E + F \text{ cof. } \epsilon) d\epsilon}{(m + n \text{ cof. } \epsilon)^{\lambda - 2}}$; & par une fuite d'opérations femblables, on arrivera à une différentielle que l'on faura intégrer.

70. A la fin de l'article 37, nous avons réduit $(1 + n \text{ cof. } \epsilon)^m$ en une férie de cette forme, $A + B$ cof. $\epsilon + C$ cof. $2\epsilon + D$ cof. $3\epsilon + E$ cof. $4\epsilon +$ &c; ainfi l'intégrale de $(1 + n \text{ cof. } \epsilon)^m d\epsilon$ eft égale à $A\epsilon + B$ fin. $\epsilon + \frac{1}{2} C$ fin. $2\epsilon + \frac{1}{3} D$ fin. $3\epsilon + \frac{1}{4} E$ fin. $4\epsilon +$ &c. Si m eft un nombre entier pofitif, on aura chacun des coefficiens & l'intégrale elle-même fous une forme finie; par exemple, fi $m = 3$, on aura $A = 1 + \frac{3n^2}{2}$, $B = 3n + \frac{3n^3}{4}$, $C = \frac{3n^2}{2}$, $D = \frac{n^3}{4}$, $E = 0$; fi $m = 4$, on aura $A = 1 + 3n^2 + \frac{3}{8} n^4$, $B = 4n + 3n^3$, $C = 3n^2 + \frac{n^4}{2}$, $D = n^3$, $E = \frac{n^4}{8}$, $F = 0$; &c. Faifons enfuite $m = -1$, & nous aurons $A = 1 + \frac{n^2}{2} + \frac{3n^4}{8} + \frac{5n^6}{16} +$ &c. $B = -(n + \frac{3n^3}{4} + \frac{5n^4}{8} +$ &c$)$, & les autres

coefficiens feront donnés par les équations $nC + 2B + 2nA = 0$, $nD + 2C + nB = 0$, &c. Lorfque n eft moindre que 1, $A = \frac{1}{\sqrt{(1 - n^2)}}$, $B \left(= -\frac{2}{n}(-1 + 1 + \frac{n^2}{2} + \frac{3n^4}{8} + \&c) \right) = \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(1-n^2)}}\right)$, &c. Il ne fera pas toujours auffi facile de trouver la relation entre les deux premiers coefficiens A & B; cependant fi l'on veut faire attention que $\frac{2An^2 + Bn}{m+2} = n^2 + m . \frac{m-1}{2} . \frac{n^4}{4} + m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . \frac{m-3}{4} . \frac{3n^6}{8} + \&c$, & que fi l'on différentie cette équation en regardant n comme variable, on a $\frac{(4An + B).dn + 2n^2 dA + ndB}{m+2} = 2ndn(1 + m . \frac{m-1}{2} . \frac{n^2}{2} + m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . \frac{m-3}{4} . \frac{3n^4}{8} + \&c) = 2Andn$, on verra que cette relation eft donnée généralement par l'équation $d . Bn = 2Amndn - 2n^2 dA$, d'où l'on tire $Bn = 2\int(Amndn - n^2 dA) = -2n^2 A + 2(m + 2)\int Andn$; l'intégrale $\int Andn$ doit être prife de maniere qu'elle s'évanouiffe lorfque $n = 0$, puifque alors $B = 0$.

Soit toujours $(1 + n \text{ cof. } \zeta)^m = A + B \text{ cof. } \zeta + C \text{ cof. } 2\zeta + \&c$; foit fait auffi $(1 + n \text{ cof. } \zeta)^{m-1} = A' + B' \text{ cof. } \zeta + C' \text{ cof. } 2\zeta + \&c$. Si l'on multiplie la feconde fuite par $1 + n \text{ cof. } \zeta$, elle doit être égale à la premiere; donc, à caufe de cof. ζ cof. $\lambda\zeta =$

$\frac{\text{cof.}(\lambda+1).\zeta+\text{cof.}(\lambda-1).\zeta}{2}$, on aura l'équation

$$\begin{array}{l} A + B \text{ cof. } \zeta + C \text{ cof. } 2\zeta + D \text{ cof. } 3\zeta + \&c \\ = A' + B' \text{cof.}\zeta + C' \text{ cof.} 2\zeta + D' \text{cof.} 3\zeta + \&c, \\ + \frac{nB'}{2} + nA' \quad + \frac{nB'}{2} \qquad + \frac{nC'}{2} \\ \qquad + \frac{nC'}{2} \quad + \frac{nD'}{2} \qquad + \frac{nE'}{2} \end{array}$$

d'où l'on tire $B' = \frac{2(A-A')}{n}$, $C' = \frac{2(B-B')}{n} - 2A'$, $D' = \frac{2(C-C')}{n} - B'$, $E' = \frac{2(D-D')}{n} - C'$, &c. Pour trouver A', A étant donné, je remarque que

$$A = 1 + m. \quad \frac{m-1}{2}.\frac{n^2}{2} + m. \quad \frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{3n^4}{8} + \&c,$$

$$A' = 1 + (m-1).\frac{m-2}{2}.\frac{n^2}{2} + (m-1).\frac{m-2}{2}.\frac{m-3}{2}.\frac{m-4}{4}.\frac{3n^4}{8} + \&c;$$

or la premiere étant multipliée par n^{-m}, & différentiée, en regardant n comme variable, donne $\frac{d.An^{-m}}{dn} = -mn^{-m-1}\left(1 + (m-1).\frac{m-1}{2}.\frac{n^2}{2} + (m-1).\frac{m-2}{2}.\frac{m-3}{3}.\frac{m-4}{4}.\frac{3n^4}{8} + \&c\right) = -mA'n^{-m-1}$; donc la relation entre ces deux coefficiens fera donnée par l'équation $A' = \frac{d.An^{-m}}{d.n^{-m}}$. On trouveroit de la même maniere que $B' = \frac{d.Bn^{-m}}{d.n^{-m}}$, $C' = \frac{d.Cn^{-m}}{d.n^{-m}}$, &c ; mais on a auffi $B' = \frac{2(A-A')}{n}$, donc $\frac{2dA}{mdn} = B -$

$B - \frac{ndB}{mdn}$, d'où l'on tire, en multipliant les deux membres par n^{-m-1}, $B = -2n^m \int n^{-m-1} dA = -\frac{2A}{n} - 2(m+1) n^m \int A n^{-m-2} dn$. En égalant cette valeur de B à celle-ci, $B = -2nA + \frac{2(m+2)}{n} \int A n\, dn$, on aura l'équation $A + (m+1) n^{m+1} \int A n^{-m-2} dn = n^2 A - (m+2) \int A n\, dn$, & en différentiant deux fois pour faire disparoître les deux signes d'intégrations, on trouvera l'équation linéaire du second ordre $(1-n^2)\frac{d^2A}{dn^2} + \frac{2(m-1)n^2+1}{n} \frac{dA}{dn} - m.(m-1).A = 0$. Soit a la valeur de A lorsque m est un nombre entier positif que je nomme i; $\frac{a}{(1-n^2)^i \sqrt{(1-n^2)}}$ sera la valeur de A lorsque m est un nombre entier négatif $-i-1$. Si, par exemple, $m = 3$, l'équation précédente donnera $A = 1 + \frac{3n^2}{2}$; & si $m = -4$, elle donnera $A = \frac{1+\frac{3n^2}{2}}{(1-n^2)^3 \sqrt{(1-n^2)}}$: si $m = 4$, $A = 1 + 3n^2 + \frac{3}{8}n^4$; & si $m = -5$, $A = \frac{1+3n^2+\frac{3}{8}n^4}{(1-n^2)^4 \sqrt{(1-n^2)}}$: Mais si m est un nombre fractionnaire, on aura A par la série donnée dans l'article cité, & qui sera d'autant plus convergente que n sera plus petit que 1. Il pourroit se faire que n différât peu de l'unité, & qu'il fût nécessaire de prendre un très grand nombre

de termes de la série; alors on auroit recours au moyen suivant pour déterminer ce premier coefficient dont tous les autres dépendent.

On fera pour plus de commodité, $(1+n \cos. \beta)^m = A + A1 \cos. \beta + A2 \cos. 2\beta + A3 \cos. 3\beta + \&c$, & on aura $(1-n \cos. \beta)^m = A - A1 \cos. \beta + A2 \cos. 2\beta - A3 \cos. 3\beta + \&c$. Maintenant soit pris un angle quelconque g, & soit écrit les deux équations $(1+n \cos. g)^m = A + A1 \cos. g + A2 \cos. 2g + A3 \cos. 3g + \&c$, $(1-n \cos. g)^m = A - A1 \cos. g + A2 \cos. 2g - A3 \cos. 3g + \&c$, qui étant ajoutées ensemble donnent $\frac{1}{2}(1+n \cos. g)^m + \frac{1}{2}(1-n \cos. g)^m = A + A2 \cos. 2g + A4 \cos. 4g + \&c$. On mettra dans cette équation $90° - g$ pour g, ce qui la changera en celle-ci $\frac{1}{2}(1+n \sin. g)^m + \frac{1}{2}(1-n \sin. g)^m = A - A2 \cos. 2g + A4 \cos. 4g - \&c$, qu'on ajoutera à la précédente pour avoir $A + A4 \cos. 4g + A8 \cos. 8g + \&c = (K) \ldots\ldots \frac{1}{4}(1+n \cos. g)^m + \frac{1}{4}(1-n \cos. g)^m + \frac{1}{4}(1+n \sin. g)^m + \frac{1}{4}(1-n \sin. g)^m$. Soit $4g = 90°$, on aura $\cos. 4g = 0$, $\cos. 8g = -1$, &c, & l'équation $A = K + A8 - \&c$; or comme $A8$ & les coefficiens suivans seront souvent assez petits pour pouvoir être négligés, on aura dans beaucoup de cas $A = K$ à très-peu de chose près. Mais si cette approximation ne paroît pas suffisante, on prendra un autre angle quelconque g', & ayant nommé K' ce que devient K en mettant g' pour g, on aura une équation qui étant ajoutée à la précédente, donnera $2A + A4(\cos. 4g + \cos. 4g') + A8(\cos. 8g + \cos. 8g') + A12(\cos. 12g + \cos. 12g') + A16(\cos. 16g + \cos. 16g') + \&c = K + K'$. Soit $4g = 45°$ & $4g' = 3 \cdot 45°$; à cause de $\cos. 4g + \cos. 4g' = 0$, $\cos. 8g + \cos. 8g' = 0$, $\cos. 12g + \cos. 12g' = 0$, $\cos. 16g + \cos. 16g' = -2$, &c, on trouvera $A = \frac{K+K'}{2} +$

$A16$ — &c, & $A = \frac{K + K'}{2}$, en négligeant le coefficient $A16$, & les ſuivans. Si on n'eſt point encore content de cette approximation, on prendra un troiſiéme angle g'', & ayant formé une équation qu'on ajoutera aux deux premieres, on aura, en nommant K'' ce que devient K en mettant g'' pour g, $3A = K + K' + K'' +$ &c. On fera $4g = 30°$, $4g' = 3 \cdot 30°$, $4g'' = 4 \cdot 30°$, & on trouvera que cette ſomme coſ. $4g +$ coſ. $4g' +$ coſ. $4g''$ eſt égale à zero auſſi bien que les ſuivantes juſqu'à celle-ci, coſ. $24g +$ coſ. $24g'$ $+$ coſ. $24g''$ qui eſt $= -3$; on aura donc $A = \frac{K + K' + K''}{3} + A24$ — &c, &c. Pour peu que n ſoit moindre que 1, on pourra de cette maniere déterminer A avec la plus grande exactitude. On ne doute point qu'il ne ſoit ſouvent de la plus grande importance d'avoir des ſéries très-convergentes; c'eſt pourquoi nous ajouterons ce qui ſuit à ce que nous avons déja dit ſur l'art de développer les fonctions en ſéries.

Il ſuit du Théorême démontré n°. 18, que y étant une fonction quelconque de x, ſi l'on nomme K la valeur de y qui répond à $x = a$, & $A1$, $B1$, $C1$, ce que deviennent les rapports $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = q$, $\frac{d^3y}{dx^3} = r$, &c, dans la même hypothèſe; il ſuit, dis-je, de ce Théorême, que ſi a augmente de la différence $x - a$, $y = K + A1(x - a) + B1\frac{(x-a)^2}{2} + C1\frac{(x-a)^3}{2.3} + D1\frac{(x-a)^4}{2.3.4} +$ &c; & que ſi x diminue de la même différence, $K =$

$y - p(x-a) + q\frac{(x-a)^2}{2} - r\frac{(x-a)^3}{2.3} + s\frac{(x-a)^4}{2.3.4}$ — &c, d'où l'on tire $y = K + p(x-a) - q\frac{(x-a)^2}{2} + r\frac{(x-a)^3}{2.3} - s\frac{(x-a)^4}{2.3.4}$ + &c. Soit $y = \int X\,dx$, on aura $p = X$, &c ; de plus, si on suppose que pour arriver à x, a ait passé successivement par $a, a', a'', a''' \ldots\ldots x$, on aura évidemment cette suite d'équations,

$$K' = K + A\,1\,(a'-a) + B\,1\,\frac{(a'-a)^2}{2} + C\,1\,\frac{(a'-a)^3}{2.3} + D\,1\,\frac{(a'-a)^4}{2.3.4} + \&c,$$

$$K'' = K' + A'\,1\,(a''-a') + B'\,1\,\frac{(a''-a')^2}{2} + C'\,1\,\frac{(a''-a')^3}{2.3} + D'\,1\,\frac{(a''-a')^4}{2.3.4} + \&c,$$

$$K''' = K'' + A''\,1\,(a'''-a'') + B''\,1\,\frac{(a'''-a'')^2}{2} + C''\,1\,\frac{(a'''-a'')^3}{2.3} + D''\,1\,\frac{(a'''-a'')^4}{2.3.4} + \&c,$$

. . . .

$$y = {}'y + {}'p\,(x - {}'x) + {}'q\,\frac{(x-{}'x)^2}{2} + {}'r\,\frac{(x-{}'x)^3}{2.3} + {}'s\,\frac{(x-{}'x)^4}{2.3.4} + \&c;$$

qui étant ajoutées ensemble, donneront, lorsque les différences $a'-a$, $a''-a'$, &c, seront constantes & représentées par Δa,

$$y = K + \Delta a\,(A\,1 + A'\,1 + A''\,1 + \ldots\ldots + 'p)$$
$$+ \frac{\Delta a^2}{2}(B\,1 + B'\,1 + B''\,1 + \ldots\ldots + 'q)$$
$$+ \frac{\Delta a^3}{2.3}(C\,1 + C'\,1 + C''\,1 + \ldots\ldots + 'r)$$
$$+ \frac{\Delta a^4}{2.3.4}(D\,1 + D'\,1 + D''\,1 + \ldots\ldots + 's)$$
&c.

Il n'eſt pas moins évident qu'on aura auſſi cette autre ſuite d'équations,

$$K' = K + A'\,1\,(a' - a) - B'\,1\,\frac{(a'-a)^2}{2} + C'\,1\,\frac{(a'-a)^3}{2.3} - D'\,1\,\frac{(a'-a)^4}{2.3.4} + \&c\,;$$

$$K'' = K' + A''\,1\,(a'' - a') - B''\,1\,\frac{(a''-a')^2}{2} + C''\,1\,\frac{(a''-a')^3}{2.3} - D''\,1\,\frac{(a''-a')^4}{2.3.4} + \&c,$$

$$K''' = K'' + A'''\,1\,(a''' - a'') - B'''\,1\,\frac{(a'''-a'')^2}{2} + C'''\,1\,\frac{(a'''-a'')^3}{2.3} - D'''\,1\,\frac{(a'''-a'')^4}{2.3.4} + \&c\,;$$

[.................................]

$$y = 'y + p\,(x - 'x) - q\,\frac{(x-'x)^2}{2} + r\,\frac{(x-'x)^3}{2.3} - s\,\frac{(x-'x)^4}{2.3.4} + \&c\,;$$

d'où l'on tirera dans la même hypothèſe des différences $a' - a$, $a'' - a'$, &c, regardées comme conſtantes, & repréſentées par Δa,

$$y = K + \Delta a\,(A'1 + A''1 + A'''1 + \ldots\ldots + p)$$
$$+ \frac{\Delta a^2}{2}(B'1 + B''1 + B'''1 + \ldots\ldots + q)$$
$$+ \frac{\Delta a^3}{2.3}(C'1 + C''1 + C'''1 + \ldots\ldots + r)$$
$$+ \frac{\Delta a^4}{2.3.4}(D'1 + D''1 + D'''1 + \ldots\ldots + s)$$
&c.

En prenant entre ces deux valeurs de y une moyenne arithmétique, on trouvera

$$y = K + \Delta a \Big(A1 + A'1 + A''1 + \ldots\ldots$$
$$+ p - \frac{A1 + p}{2}\Big) + \frac{\Delta a^2}{4}(B1 - q)$$
$$+ \frac{\Delta a^3}{2.3}\Big(C1 + C'1 + C''1 + \ldots\ldots$$
$$+ r - \frac{C1 + r}{2}\Big) + \frac{\Delta a^4}{4.3.4}(D1 - s)$$
$$+ \frac{\Delta a^5}{2.3.4.5}\Big(E1 + E'1 + E''1 + \ldots\ldots$$
$$+ t - \frac{E1 + t}{2}\Big) + \frac{\Delta a^6}{4.3.4.5.6}(F1 - u)$$
$$+ \&c\,;$$

& cette valeur de y ſera d'autant plus approchée, qu'on aura pris la différence Δa plus petite. On verra aiſément que de cette maniere on doit trouver des ſéries très-convergentes; mais il ne ſera pas inutile de faire remarquer que cette formule peut ſervir dans des cas où les autres méthodes d'approximation ne ſeroient d'aucun uſage.

On demande, par exemple, d'intégrer $e^{-\frac{1}{x}}dx$

de maniere que l'intégrale disparoisse lorsque $x=0$. On a $p=e^{-\frac{1}{x}}$, $q=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$, $r=\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x}}$, $s=\left(\frac{1}{x^6}-\frac{6}{x^5}+\frac{6}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}$, &c. Lorsque $x=0$, $K=0$, & $e^{-\frac{1}{x}}=1:\frac{1}{0}=0$; nous aurons, en mettant $\frac{1}{\delta}$ pour Δa, $A'1=e^{-\delta}$, $A''1=e^{-\frac{\delta}{2}}$, $A'''1=e^{-\frac{\delta}{3}}$, &c; $C'1=(\delta^4-2\delta^3)e^{-\delta}$, $C''1=\left(\frac{\delta^4}{2^4}-\frac{2\delta^3}{2^3}\right)e^{-\frac{\delta}{2}}$, $C'''1=\left(\frac{\delta^4}{3^4}-\frac{2\delta^3}{3^3}\right)e^{-\frac{\delta}{3}}$, &c; &c. Donc $y=\frac{1}{\delta}\left(e^{-\delta}+e^{-\frac{\delta}{2}}+e^{-\frac{\delta}{3}}+\ldots+e^{-\frac{1}{x}}\right)-\frac{1}{2\delta}e^{-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{2\delta x^2}\right)+\frac{1}{6}\left((\delta-2).e^{-\delta}+\frac{\delta-4}{2^4}e^{-\frac{\delta}{2}}+\frac{\delta-6}{3^4}e^{-\frac{\delta}{3}}+\ldots+\frac{1}{2\delta^3}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x}}\right)-\frac{1}{48\delta^4}\left(\frac{1}{x^6}-\frac{6}{x^5}+\frac{6}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}+$ &c.

Il pourroit arriver qu'en faisant $x=a$, on rendît quelques-uns des coefficiens $A1$, $B1$, $C1$, &c, infinis, sans que y le devînt; alors quoique l'intégrale fût possible, la formule précédente ne donneroit rien; mais on pourra toujours trouver quelque quantité à substituer pour x, qui transformera la différentielle proposée en une autre qui ne sera pas sujette à cet inconvénient; ou bien on fera usage de la méthode donnée par M. d'Alembert, & que nous avons rapportée page 250.

71. Newton, dans les Traités *de Quadraturâ curvarum* & *Methodus Fluxionum & ferierum infinitarum*, donne de très-belles méthodes pour rapporter autant qu'il eſt poſſible les intégrales aux aires des ſections coniques. M. Côtes ſimplifie beaucoup cette théorie dans ſon Livre intitulé *Harmonia menſurarum*, en faiſant voir qu'on peut toujours réduire ces intégrales aux logarithmes & aux arcs de cercle. C'eſt ſous ce dernier point de vue que les Géométres les conſiderent maintenant ; & lorſqu'une différentielle n'eſt point intégrable algébriquement, ni par les Tables des ſinus & des logarithmes, on a recours à la méthode des ſéries. Cependant il pourroît être utile de ſavoir ſi une différentielle propoſée ne ſeroit pas réductible à la quadrature ou à la rectification d'autres courbes algébriques. On trouve les premieres recherches ſur cette matiere dans le *Traité des Fluxions* de M. Maclaurin ; ces recherches ont été continuées & beaucoup augmentées par M. d'Alembert dans les *Mémoires de Berlin de* 1746 *&* 1748. Nous commencerons par les différentielles qui ſont réductibles à la rectification de l'ellipſe & de l'hyperbole.

Soit une ellipſe ou une hyperbole dont l'un des axes eſt $2a$, le parametre de cet axe p, l'abſciſſe priſe du centre x, l'ordonnée y ; on a pour l'équation de l'ellipſe $y^2 = \frac{p}{2a}(a^2 - x^2)$, & pour l'équation de l'hyperbole $y^2 = \frac{p}{2a}(x^2 - a^2)$. Donc l'élément d'un arc d'ellipſe $= \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \sqrt{\left(a^2 - x^2 + \frac{p}{2a}x^2\right)}$; & l'élément d'un arc d'hyperbole $= \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} \sqrt{\left(x^2 - a^2 + \frac{p}{2a}x^2\right)}$. Je fais

$a^2 - x^2 + \frac{p}{2a} x^2 = az$, & j'ai la différentielle $(dS) \ldots \ldots \frac{dz\sqrt{(az)}}{\sqrt{(2z-2a)}\sqrt{(p-2z)}}$ qui dépend de la rectification de l'ellipse; je fais aussi $x^2 - a^2 + \frac{p}{2a} x^2 = az$, & j'ai la différentielle $(ds) \ldots \ldots \frac{dz\sqrt{(az)}}{\sqrt{(2z+2a)}\sqrt{(2z-p)}}$ qui dépend de la rectification de l'hyperbole. Cela posé, si on propose la différentielle $(d\sigma) \ldots \ldots \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(fz^2+gz+h)}}$, on distinguera tous les cas suivants.

1°. Si f & h sont des quantités négatives, g étant une quantité positive; au lieu de la proposée, on prendra celle-ci, $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(mz-z^2-n^2)}} =$

$$\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{\left[z-\frac{m}{2}+\sqrt{\left(\frac{m^2}{4}-n^2\right)}\right]}\cdot\sqrt{\left[\frac{m}{2}+\sqrt{\left(\frac{m^2}{4}-n^2\right)}-z\right]}};$$

& en la comparant à dS, on verra qu'elle dépend de la rectification d'une ellipse dont l'un des axes que je nomme $2r = m - \sqrt{(m^2-4n^2)}$, le parametre de cet axe que je nomme $p' = m + \sqrt{(m^2-4n^2)}$; l'autre axe sera $= 2n$ à cause de $2r : 2n :: 2n : p'$. On peut donner au dénominateur $\sqrt{(mz^2-z^2-n^2)}$ la forme que voici $\sqrt{\left[\frac{m^2}{4}-n^2-\left(\frac{m}{2}-z\right)^2\right]}$, qui fait voir que $\frac{m^2}{4}$ doit nécessairement être plus grand que n^2, sans quoi la différentielle proposée seroit imaginaire. Le même dénominateur peut être mis

sous cette forme $\sqrt{\left[\left(\frac{m}{2}-r\right)^2-\left(\frac{m}{2}-z\right)^2\right]}$

ou sous celle ci $\sqrt{\left[\left(r-\frac{m}{2}\right)^2-\left(z-\frac{m}{2}\right)^2\right]}$,

selon que r est plus grand ou moindre que $\frac{m}{2}$; on tire de l'une & de l'autre que z doit être plus grand que r. De plus, soit $y^2 = \frac{p'}{2r}(r^2 - x^2)$ l'équation de cette ellipse, on aura $r^2 - x^2 + \frac{p'}{2r}x^2 = rz$ & $x^2 = \frac{rz - r^2}{\frac{p'}{2r} - 1}$; donc, à cause de $rz > r^2$ & de $p' > 2r$, x^2 est une quantité positive comme cela doit être pour que l'abscisse ne soit point imaginaire.

2°. Si f étant positif & h négatif, on a g positif ou négatif; au lieu de la proposée on prendra $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(z^2 \pm mz - n^2)}}$

$$= \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{\left[z \pm \frac{m}{2} + \sqrt{\left(\frac{m^2}{4} + n^2\right)}\right]} \cdot \sqrt{\left[z \pm \frac{m}{2} - \sqrt{\left(\frac{m^2}{4} + n^2\right)}\right]}},$$

& en la comparant à ds, on verra qu'elle dépend de la rectification d'une hyperbole dont l'un des axes que je nomme $2r = \pm m + \sqrt{(m^2 + 4n^2)}$, le parametre de cet axe que je nomme $p' = \mp m + \sqrt{(m^2 + 4n^2)}$; l'autre axe sera $= 2n$ à cause de $2r : 2n :: 2n : p'$. Si l'on prend pour l'équation de cette hyperbole $y^2 = \frac{p'}{2r}(x^2 - r^2)$, on aura $x^2 - r^2 + \frac{p'}{2r}x^2 = rz$ & $x = \pm\sqrt{\left(\frac{r^2 + rz}{\frac{p'}{2r} + 1}\right)}$ qui est toujours une quantité réelle.

3°. Si f & h étant négatif, on a g positif ou négatif; au lieu de la proposée, on prendra $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(n^2 \pm mz - z^2)}}$ qui devient, en faisant $z = \frac{n^2}{u}$,

$$\frac{-n^2 du}{u\sqrt{u}\sqrt{(u^2 \pm mu - n^2)}} = -\frac{u^2 du + n^2 du}{u\sqrt{u}\sqrt{(u^2 \pm mu - n^2)}}$$

$+ \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(u^2 \pm mu - n^2)}}$. Nous venons d'intégrer le second terme; quant au premier, il devient $-\frac{du + \frac{n^2 du}{u^2}}{\sqrt{\left[u \pm m - \frac{n^2}{u}\right]}}$. Or si nous faisons $u \pm m - \frac{n^2}{u} = t$, ce qui donne $du + \frac{n^2 du}{u^2} = dt$, cette quantité se changera en celle-ci $-\frac{dt}{\sqrt{t}}$, dont l'intégrale est $-2\sqrt{t}$.

4°. Il ne nous reste plus que le cas où, f & h étant positifs, g seroit positif ou négatif; & où il seroit question d'intégrer $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(n^2 \pm mz + z^2)}}$. Les deux facteurs de $n^2 \pm mz + z^2$ sont $z \pm \frac{m}{2} + \sqrt{\left(\frac{m^2}{4} - n^2\right)}$ & $z \pm \frac{m}{2} - \sqrt{\left(\frac{m^2}{4} - n^2\right)}$; nous examinerons en premier lieu ce qui arrive lorsqu'ils sont réels. Soit $\sqrt{\left(\frac{m^2}{4} - n^2\right)} = m'$ & $z \pm \frac{m}{2} \mp m' = u$; la différentielle $\frac{zdz}{\sqrt{z}\sqrt{(n^2 \pm mz + z^2)}}$,

qui n'est autre que la proposée, se changera en

celle-ci $\frac{\left(u \mp \frac{m}{2} \pm m'\right) du}{\sqrt{u}\sqrt{(u \pm 2m')}\sqrt{\left(u \mp \frac{m}{2} \pm m'\right)}} =$

$\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(u \pm 2m')}\sqrt{\left(u \mp \frac{m}{2} \pm m'\right)}} -$

$\frac{\left(\pm \frac{m}{2} \mp m'\right) du}{\sqrt{u}\sqrt{(u \pm 2m')}\sqrt{\left(u \mp \frac{m}{2} \pm m'\right)}}$, dont le premier terme dépend de la rectification de l'hyperbole.

Soit $z \pm \frac{m}{2} = u$; par cette substitution on changera la différentielle $\frac{z dz}{\sqrt{z}\sqrt{(n^2 \pm mz + z^2)}}$ en celle-ci $\frac{u du \mp \frac{m}{2} du}{\sqrt{\left(u \mp \frac{m}{2}\right)} \cdot \sqrt{\left(u^2 + n^2 - \frac{m^2}{4}\right)}}$; & si $n^2 > \frac{m^2}{4}$, on fera $n^2 - \frac{m^2}{4} = q^2$, & on aura

$\frac{u du \mp \frac{m}{2} du}{\sqrt{\left(u \mp \frac{m}{2}\right)}\sqrt{(u^2 + q^2)}}$. On fera usage de cette transformation $\sqrt{(u^2 + q^2)} = t - u$, qui donnera $u = \frac{1}{2}\left(t - \frac{q^2}{t}\right)$, $du = \frac{dt}{2t}\left(t + \frac{q^2}{t}\right)$, $udu = \frac{dt}{4t} \cdot \left(t^2 - \frac{q^4}{t^2}\right)$, $\sqrt{(u^2 + q^2)} = \frac{t^2 + q^2}{2t}$,

$\sqrt{\left(u \mp \frac{m}{2}\right)} = \frac{\sqrt{(t^2 \mp mt - q^2)}}{\sqrt{2t}}$; & en ſubſtituant ces valeurs, on aura la transformée $\frac{(t^2 - q^2)dt}{t\sqrt{2t}\sqrt{(t^2 \mp mt - q^2)}}$ $- \frac{m dt}{\sqrt{2t}\sqrt{(t^2 \mp mt - q^2)}}$. Le premier terme de cette transformée dépend de la rectification de l'hyperbole ; le ſecond terme ou $\frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{(t^2 \mp mt - q^2)}}$ $= \frac{t^2 dt + dt}{t\sqrt{t}\sqrt{(t^2 \mp mt - q^2)}} - \frac{dt\sqrt{t}}{\sqrt{(t^2 \mp mt - q^2)}}$ eſt compoſé de deux parties, dont la premiere eſt intégrable algébriquement, & la ſeconde dépend de la rectification de l'hyperbole. Quant aux différentielles $\frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{(t^2 \mp mt - q^2)}}$ & $\frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{(u + 2m')}\sqrt{\left(u \mp \frac{m}{2} + m'\right)}}$, elles ſont renfermées dans celle-ci $(d\Sigma) \ldots \frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{(fz^2 + gz + h)}}$ dont nous allons nous occuper.

1°. Soit propoſé $\frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{(n^2 \pm mz - z^2)}}$, qui, en faiſant pour abréger $\sqrt{\left[\frac{m^2}{4} + n^2\right]} = m'$, devient $\frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{\left[z \mp \frac{m}{2} + m'\right]} \cdot \sqrt{\left[\pm \frac{m}{2} + m' - z\right]}}$; je transforme cette différentielle en celle-ci,

$$\frac{\left[z \mp \frac{m}{2} + m'\right] dz - z\,dz}{\left[m' \mp \frac{m}{2}\right] \sqrt{z} \sqrt{\left[z \mp \frac{m}{2} + m'\right]} . \sqrt{\left[\pm \frac{m}{2} + m' - z\right]}},$$

qui est égale à $\frac{dz \sqrt{\left[z \mp \frac{m}{2} + m'\right]}}{\left[m' \mp \frac{m}{2}\right] \sqrt{z} \sqrt{\left[\pm \frac{m}{2} + m' - z\right]}} -$

$$\frac{dz \sqrt{z}}{\left[m' \mp \frac{m}{2}\right] \sqrt{\left[z \mp \frac{m}{2} + m'\right]} . \sqrt{\left[\pm \frac{m}{2} + m' - z\right]}},$$

dont le second terme est en partie intégrable algébriquement, & dépend en partie de la rectification de l'hyperbole. En faisant $z \mp \frac{m}{2} + m' = u$, je transformerai le premier en ceci

$$\frac{du \sqrt{u}}{\left(m' \mp \frac{m}{2}\right) \sqrt{\left(u \pm \frac{m}{2} - m'\right)} . \sqrt{(2m' - u)}},$$ qui dépend de la rectification de l'ellipse.

2°. Si la proposée est $\frac{dz}{\sqrt{z} \sqrt{(z^2 \pm mz - n^2)}}$, je ferai $z = \frac{n^2}{u}$, & je la changerai en celle-ci, $\frac{-du}{\sqrt{u} \sqrt{(n^2 \pm mu - u^2)}}$, qui est précisément celle dont nous venons de nous occuper.

3°. Soit maintenant cette différentielle $\frac{dz}{\sqrt{z} \sqrt{(z^2 \pm mz + n^2)}}$; en faisant pour abréger $\sqrt{\left(\frac{m^2}{4} - n^2\right)} = m'$, les deux facteurs de $z^2 \pm$

$mz+n^2$ feront $z\pm\frac{m}{2}+m'$ & $z\pm\frac{m}{2}-m'$; & comme $\frac{m^2}{4}$ peut être plus grand ou moindre que n^2, je diſtinguerai deux cas, celui où les deux facteurs ſont réels, & celui où ils ſont imaginaires. Pour réſoudre le premier, je ferai $z\pm\frac{m}{2}\mp m'=u$, & par-là je changerai la propoſée en celle-ci,

$$\frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{(u\pm 2m')}.\sqrt{\left[u\mp\frac{m}{2}\pm m'\right]}},$$ qui s'intégrera comme la précédente. Pour réſoudre le ſecond cas, je ferai $z\pm\frac{m}{2}=u$, & pour abréger $n^2-\frac{m^2}{4}=q^2$, ce qui changera la propoſée en celle-ci,

$$\frac{du}{\sqrt{\left[u\mp\frac{m}{2}\right]}.\sqrt{(u^2+q^2)}};$$ en faiſant enſuite $\sqrt{(u^2+q^2)}=t-u$, j'aurai $\frac{dt\sqrt{2}}{\sqrt{t}\sqrt{(t^2\mp mt-q^2)}}$ que j'intégrerai de la même maniere.

4°. Il ne reſte plus que $\frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{(mz-z^2-n^2)}}$; qu'on peut mettre ſous cette forme,

$$\frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{\left[\frac{m^2}{4}-n^2-\left(\frac{m}{2}-z\right)^2\right]}},$$ qui fait voir que $\frac{m^2}{4}$ doit être $>n^2$, ſans quoi la propoſée ſeroit imaginaire. On fera pour abréger $\sqrt{\left(\frac{m^2}{4}-n^2\right)}=m'$, & on la changera en

$\frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{\left[z-\frac{m}{2}+m'\right]}.\sqrt{\left[\frac{m}{2}+m'-z\right]}}$; supposant ensuite $\frac{m}{2}+m'-z=u$, on aura

$\frac{-du}{\sqrt{u}\sqrt{(2m'-u)}\sqrt{\left[\frac{m}{2}+m'-u\right]}}$, qui n'est qu'un cas particulier de la différentielle du troisiéme numéro.

La différentielle $\frac{du}{\sqrt{(a+bu+cu^2+fu^3)}}$ dépend de $d\Sigma$, ce qu'on trouvera en supposant l'un des facteurs réels de $a+bu+cu^2+fu^3$ (& cette quantité en a toujours au moins un qui est tel) égal à z; on trouvera par la même transformation que $\frac{udu}{\sqrt{(a+bu+cu^2+fu^3)}}$ est composé de deux termes, dont l'un dépend de $d\Sigma$, & l'autre de $d\sigma$; quant à celle-ci, $\frac{du}{u\sqrt{(a+bu+cu^2+fu^3)}}$, en faisant $u=\frac{1}{x}$, elle devient $\frac{-dx\sqrt{x}}{\sqrt{(ax^3+bx^2+cx+f)}}$.

Maintenant, soit l'équation du troisiéme ordre (α)...... $xy^2=ax^3+bx^2+cx+f$, d'où l'on tire $ydx=\frac{dx}{\sqrt{x}}\sqrt{(ax^3+bx^2+cx+f)}$; en multipliant cette différentielle haut & bas par son numérateur, je la transforme en celle-ci

$$\frac{fdx}{\sqrt{x}\sqrt{(ax^3+bx^2+cx+f)}}+\frac{(c+bx+ax^2)dx\sqrt{x}}{\sqrt{(ax^3+bx^2+cx+f)}},$$

dont le premier terme devient, en faisant $x=\frac{1}{u}$, $\frac{-fdu}{\sqrt{(a+bu+cu^2+fu^3)}}$. Je nomme ce premier terme $d\sigma'$,

$d\sigma'$, &. il eſt clair que $\frac{c\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(ax^3+bx^2+cx+f)}}=$ $y\,dx-d\sigma'-\frac{(bx+ax^2)\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(ax^3+bx^2+cx+f)}}$. Soit $x=\frac{1}{u}$; le dernier terme du ſecond membre de la précédente équation deviendra $\frac{(bu+a)\,du}{u^3\sqrt{(a+bu+cu^2+fu^3)}}$. Si cette différentielle eſt en partie intégrable algébriquement, & dépend en partie de celles qui précédent, je puis faire $\frac{(bu+a)\,du}{u^3\sqrt{(a+bu+cu^2+fu^3)}}=$ $d[(Au^\lambda+Bu^\mu)\sqrt{(a+bu+cu^2+fu^3)}]+$ $\frac{\left(\frac{C}{u}+D+Eu\right)du}{\sqrt{(a+bu+cu^2+fu^3)}}$, $A, B, C, D, E, \lambda, \mu$ étant des quantités qu'il s'agit de déterminer. En réduiſant tout au même dénominateur, & diviſant par du, j'ai la transformée $bu+a=\lambda aAu^{\lambda+2}+$ $(\lambda+\frac{1}{2})bAu^{\lambda+3}+(\lambda+1)cAu^{\lambda+4}+(\lambda+\frac{3}{2})fAu^{\lambda+5}+$ $\mu aBv^{\mu+2}+(\mu+\frac{1}{2})bBu^{\mu+3}+(\mu+1)cBu^{\mu+4}+$ $(\mu+\frac{3}{2})fBu^{\mu+5}+Cu^2+Du^3+Eu^4$, qui devient, en faiſant $\lambda=-2$ & $\mu=-1$ qui eſt la ſeule hypothèſe qui ſoit poſſible,

$$\begin{array}{lllll} \frac{f}{2}B\,.\,u^4 & -\frac{f}{2}A\,.\,u^3 & -cAu^2 & -\frac{3b}{2}Au & -2aA=0, \\ +E & +D & -\frac{b}{2}B & -aB & -a \\ & & +C & -b & \end{array}$$

& donne $A=-\frac{1}{2}$, $B=-\frac{b}{4a}$, $C=\frac{b^2}{8a}-\frac{c}{2}$, $D=-\frac{f}{4}$, $E=\frac{bf}{8a}$. Donc $\frac{(bu+a)\,du}{u^3\sqrt{(a+bu+cu^2+fu^3)}}$

$$= -d\left[\left(\frac{1}{2u^2} + \frac{b}{4au}\right)\sqrt{(a+bu+cu^2+fu^3)}\right]$$

$$-\frac{(2a-bu)fdu}{8a\sqrt{(a+bu+cu^2+fu^3)}} - \frac{(b^2+4ac)du}{8au\sqrt{(a+bu+cu^2+fu^3)}}.$$

Or comme en faisant $u = \frac{1}{x}$, le dernier terme devient $\frac{(b^2+4ac)dx\sqrt{x}}{8a\sqrt{(ax^3+bx^2+cx+f)}}$, il est clair que

$$(d\Sigma') \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(ax^3+bx^2+cx+f)}} =$$

$$\frac{8a}{b^2-4ac}\left(-ydx+d\sigma'+d\left[\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{b}{4a\sqrt{x}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\sqrt{(ax^3+bx^2+cx+f)}\right]\right) + \frac{(2a-bu)fdu}{8a\sqrt{(a+bu+cu^2+fu^3)}};$$

c'est-à-dire que l'intégrale de cette différentielle est en partie algébrique, & dépend en partie de la rectification des sections coniques & de la quadrature d'une courbe du troisiéme ordre dont l'équation est α.

Il en faut excepter le cas où l'on auroit $b^2 = 4ac$; alors on supposera, ce qu'on peut toujours faire, que $ax^3+bx^2+cx+f = (mx+n)(px^2+qx+r)$, ce qui donnera $a = mp$, $b = mq+np$, $c = mr+nq$, $f = nr$, & au lieu de $b^2 = 4ac$, cette équation $(mq+np)^2 = 4mp(mr+nq)$. On fera ensuite $mx+n = z$, & la différentielle $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(mx+n)}.\sqrt{(px^2+qx+r)}}$ deviendra $\frac{dz\sqrt{(z-n)}}{\sqrt{mz}\sqrt{[pz^2+(mq-2np).z+m^2r-mnq+n^2p]}}$, qui, étant multipliée haut & bas par $\sqrt{(z-n)}$, se changera en celle-ci,

$$\frac{zdz-ndz}{\sqrt{mz}\sqrt{[pz^3+(mq-3np)z^2+(m^2r-2mnq+3n^2p)z-m^2nr+mn^2q-n^3p]}},$$

dont le second terme est la même différentielle que

$d\sigma'$; le premier ne souffrira de difficulté que dans le cas où l'on auroit $(mq - 3np)^2 = 4p(m^2 r - 2mnq + 3n^2 p)$. En comparant cette équation avec celle-ci $(mq + np)^2 = 4mp(mr + nq)$, il vient $np(mq - np) = 0$, ce qui donne, ou $n = 0$, ou $p = 0$, ou $mq - np = 0$. Dans les deux premiers cas on a les deux différentielles $\frac{dx}{\sqrt{m}\sqrt{(px^2 + qx + r)}}$ & $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(mx + n)} \cdot \sqrt{(qx + r)}}$, qu'il est bien facile de rendre rationnelles; nous allons nous occuper du troisiéme cas. Alors les deux équations que nous venons de comparer deviennent identiquement les mêmes, & donnent $pm^2 r = 0$, c'est-à-dire $p = 0$, ou $m = 0$, ou $r = 0$; si $m = 0$ ou $r = 0$, on a les différentielles $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{n}\sqrt{(px^2 + qx + r)}}$ & $\frac{dx}{\sqrt{(mx + n)} \cdot \sqrt{(px + q)}}$ qu'il ne sera pas plus difficile de rendre rationnelles.

Soit encore la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{(a + bx + cx^2 + fx^3 + gx^4)}}$; si le dénominateur a des facteurs binomes réels, & que $k + lx$ soit un de ces facteurs, en faisant $k + lx = z$, on changera cette différentielle en une autre de la forme de $\frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{(m + nz + pz^2 + qz^3)}}$, qui, comme on voit, se rapporte à des arcs de sections coniques. Mais dans les autres cas, le dénominateur pourra au moins se diviser en deux facteurs trinomes que je représenterai par $k + lx + mx^2$, $p + qx + rx^2$, & j'aurai à intégrer la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{(k + lx + mx^2)} \cdot \sqrt{(p + qx + rx^2)}}$.

En divisant $p + qx + rx^2$ par $k + lx + mx^2$,

& faisant pour abréger $\frac{r}{m}=\alpha$, $p-\frac{rk}{m}=\beta$, $q-\frac{rl}{m}=\gamma$, je trouve pour quotient de cette division α & un reste $\beta+\gamma x$; ainsi la proposée devient $\frac{dx}{(k+lx+mx^2)\sqrt{\left[\alpha+\frac{\beta+\gamma x}{mx^2+lx+k}\right]}}$. Je fais ensuite $\frac{\beta+\gamma x}{mx^2+lx+k}=\frac{1}{z}$, d'où je tire, en résolvant l'équation du second degré, $x=\frac{\gamma z-l}{2m}\pm\frac{1}{2m}\sqrt{[4m(\beta z-k)+(\gamma z-l)^2]}$. Je mets pour x, x^2 & dx leurs valeurs dans la différentielle précédente; elle devient par là $\frac{\mp dz}{z\sqrt{\left[\alpha+\frac{1}{z}\right]}\sqrt{[4m(\beta z-k)+(\gamma z-l)^2]}}$; puis, en faisant $\frac{1}{z}=u$, je la change en celle-ci $\frac{\mp du}{\sqrt{(\alpha+u)}\,.\,\sqrt{[\gamma^2+(4m\beta-2\gamma l)u+(l^2-4mk)u^2]}}$, qui se réduit aussi à des arcs de sections coniques. Donc dans tous les cas la proposée ne dépend que de la rectification des sections coniques.

Newton, dans l'Ouvrage intitulé : *Enumeratio linearum tertii ordinis*, rapporte toutes les courbes du troisiéme ordre aux quatre équations suivantes (Voyez l'Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques, par M. Cramer, & l'Ouvrage de M. Euler qui a pour titre : *Introductio in analysin infinitorum*),

$$xy^2-ey=ax^3+bx^2+cx+f$$
$$xy=ax^3+bx^2+cx+f$$
$$y^2=ax^3+bx^2+cx+f$$
$$y=ax^3+bx^2+cx+f.$$

La premiere donne $y\,dx = \frac{e\,dx}{2x} \pm \frac{dx}{x}$ $\sqrt{\left(ax^4 + bx^3 + cx^2 + fx + \frac{e^2}{4}\right)}$, dont le fecond terme devient $\frac{\left(ax^4 + bx^3 + cx^2 + fx + \frac{e^2}{4}\right)dx}{x\sqrt{\left(ax^4 + bx^3 + cx^2 + fx + \frac{e^2}{4}\right)}}$.

1°. En repréfentant par $mx^2 + lx + k$ & $rx^2 + qx + p$ les deux facteurs trinomes du dénominateur, on a $\frac{dx}{x\sqrt{\left(ax^4 + bx^3 + cx^2 + fx + \frac{e^2}{4}\right)}} =$ $\frac{dx}{x(mx^2 + lx + k)\sqrt{\left[\frac{rx^2 + qx + p}{mx^2 + lx + k}\right]}}$, que je transforme en $\frac{dx}{kx\sqrt{\left[\frac{rx^2 + qx + p}{mx^2 + lx + k}\right]}} -$ $\frac{(mx + l)dx}{k(mx^2 + lx + k)\sqrt{\left[\frac{rx^2 + qx + p}{mx^2 + lx + k}\right]}}$, dont le fecond terme n'eft autre chofe que $-$ $\frac{mx\,dx + l\,dx}{k\sqrt{\left[ax^4 + bx^3 + cx^2 + fx + \frac{e^2}{4}\right]}}$. Je change le premier en ce qui fuit, $\frac{dx}{kx\sqrt{\left[\alpha + \frac{\beta + \gamma x}{k + lx + mx^2}\right]}}$, qui, en fuppofant $\frac{\beta + \gamma x}{k + lx + mx^2} = \frac{1}{z}$, devient $\frac{\pm \gamma\,dz}{k\sqrt{\left[\alpha + \frac{1}{z}\right]}.\sqrt{[4m(\beta z - k) + (\gamma z - l)^2]}} \pm$

$$\frac{\zeta d z}{k\sqrt{\left(\alpha+\frac{1}{z}\right)}.\sqrt{\left(4m(\zeta z-k)+(\nu z-l)^2\right)}.\left(\frac{\nu z-l}{2m}\pm\frac{1}{2m}\sqrt{[4m(\zeta z-k)+(\nu z-l)^2]}\right)};$$

dont le premier terme

$$\frac{\pm\nu dz\sqrt{z}}{k\sqrt{(\alpha z+1)}.\sqrt{[4m(\zeta z-k)+(\nu z-l)^2]}}$$ est intégrable en partie algébriquement, & dépend en partie de la quadrature de la courbe du troisiéme ordre dont l'équation est α. Je multiplie le second terme haut & bas par $\frac{\nu z-l}{2m}\mp\frac{1}{2m}\sqrt{[4m(\zeta z-k)+(\nu z-l)^2]}$; il devient par-là $\dfrac{\mp\frac{\nu z-l}{\zeta z-k}\zeta dz}{2k\sqrt{\left[\alpha+\frac{1}{z}\right]}\sqrt{[4m(\zeta z-k)+(\nu z-l)^2]}}$

$+\dfrac{\zeta dz}{2k(\zeta z-k)\sqrt{\left[\alpha+\frac{1}{z}\right]}}$, dont on rendra la seconde partie rationnelle en faisant $\sqrt{\left(\alpha+\frac{1}{z}\right)}=u$.

Si l'on fait $\alpha+\frac{1}{z}=u$, la premiere deviendra

$$\frac{\frac{\nu+\alpha l-lu}{\zeta+\alpha k-ku}\cdot\frac{\pm\zeta du}{u-\alpha}}{2k\sqrt{u}\sqrt{[4m(u-\alpha)(\zeta+\alpha k-ku)+(\nu+\alpha l-lu)^2]}}$$

qu'on trouvera, par la méthode des fractions rationnelles, être composée de deux termes de la forme de $\frac{dz}{(m+nz)\sqrt{z}\sqrt{(fz^2+gz+h)}}=$

$\frac{dz}{m\sqrt{z}.\sqrt{(fz^2+gz+h)}}-\frac{ndz\sqrt{z}}{m.(m+nz).\sqrt{(fz^2+gz+h)}}$.

Le premier de ces deux-ci s'intégre par les arcs de

sections coniques ; pour intégrer l'autre, je fais $m + n z = u$, & je le change par-là en

$$\frac{du\sqrt{n}.\sqrt{(u-m)}}{mu\sqrt{[f(u-m)^2+gn(u-m)+hn^2)}}$$, qui, étant multiplié haut & bas par $\sqrt{(u-m)}$, devient

$$\frac{du\sqrt{n}}{m\sqrt{(u-m)}.\sqrt{[f(u-m)^2+gn(u-m)+hn^2]}} - \frac{du\sqrt{n}}{u\sqrt{(u-m)}.\sqrt{[f(u-m)^2+gn(u-m)+hn^2]}},$$

dont la premiere partie dépend de la rectification des sections coniques, & la seconde de la rectification des sections coniques & de la quadrature de la courbe du troisiéme ordre, dont l'équation est α.

2°. Les différentielles qui nous restent à intégrer pour achever de quarrer la courbe du troisiéme ordre dont il est question maintenant, sont toutes comprises dans celles-ci $\frac{hx^m dx}{\sqrt{\left(ax^4+bx^3+cx^2+fx+\frac{e^2}{4}\right)}}$, où m est un nombre entier positif ; ainsi par la méthode du n°. 67, nous pourrons faire dépendre ces différentielles de $\frac{dx}{\sqrt{\left(ax^4+bx^3+cx^2+fx+\frac{e^2}{4}\right)}}$ qui s'intégre par la rectification des sections coniques. En faisant usage de la même méthode, nous trouverons aussi que $\frac{hdx}{x^m\sqrt{\left(ax^4+bx^3+cx^2+fx+\frac{e^2}{4}\right)}}$ dépend d'arcs de sections coniques & de la quadrature de la courbe du troisiéme ordre dont l'équation est α.

Les trois autres équations du troisiéme ordre don-

nent les trois différentielles $ax^2dx+bxdx+cdx+\frac{fdx}{x}$, $dx\sqrt{(ax^3+bx^2+cx+f)}$, $ax^3dx+bx^2dx+cxdx+fdx$, dont la premiere & la troisiéme s'intégreront bien facilement; la seconde devient $\frac{ax^3dx+bx^2dx+cxdx+fdx}{\sqrt{(ax^3+bx^2+cx+f)}}$ qui s'intégrera par la rectification des sections coniques. Nous ne pousserons pas plus loin ces recherches, & nous terminerons cet article par résoudre ce Problême: *Trouver la surface du cône oblique qui a pour base un cercle.*

Soit le rayon du cercle qui sert de base au cône $=1$, l'abscisse prise du centre $=x$, la hauteur du cône $=h$, la distance du centre de la base au pied de cette perpendiculaire $=a$; cela posé, si nous menons une tangente au point de la circonférence qui répond à l'abscisse x, & que du sommet du cône nous abaissions une perpendiculaire z sur cette tangente, nous aurons pour l'élément de la surface du cône $\frac{-zdx}{2\sqrt{(1-x^2)}}$, & nous trouverons ensuite par une construction fort simple, $z=\sqrt{[h^2+(ax-1)^2]}$. Ainsi la différentielle à intégrer sera $\frac{dx\sqrt{[h^2+(ax-1)^2]}}{\sqrt{(1-x^2)}}$, ou, faisant $1-x=z$, $\frac{dz\sqrt{[h^2z^2+(az-z-a)^2]}}{z^2\sqrt{(2z-1)}}$. Soit, pour abréger $h^2+(a-1)^2=m^2$, $-2a(a-1)=n$, & notre différentielle deviendra $\frac{dz\sqrt{(m^2z^2+nz+a^2)}}{z^2\sqrt{(2z-1)}}$ que nous changerons, en la multipliant haut & bas par le nu-

mérateur, en celle-ci, $\frac{m^2z^2dz+nzdz+a^2dz}{z^2\sqrt{(2z-1)}.\sqrt{(m^2+nz+a^2)}}$.
Le premier terme $\frac{m^2dz}{\sqrt{(2z-1)}.\sqrt{(m^2z^2+nz+a^2)}}$ dépend de la rectification des sections coniques. Le second $\frac{ndz}{z\sqrt{(2z-1)}.\sqrt{(m^2z^2+nz+a^2)}}$, en faisant $\frac{1}{z}=u$, devient $\frac{-ndu\sqrt{u}}{\sqrt{(2-u)}.\sqrt{(a^2u^2+nu+m^2)}}$, & dépend par conséquent de la rectification des sections coniques & de la quadrature d'une courbe du troisiéme ordre dont l'ordonnée seroit $\frac{\sqrt{(2-u)}.\sqrt{(a^2u^2+nu+m^2)}}{\sqrt{u}}$. Pour intégrer le troisiéme ou $\frac{a^2dz}{z^2\sqrt{(2z-1)}.\sqrt{(m^2z^2+nz+a^2)}}$, je le suppose $=d[Az^\lambda\sqrt{(2z-1)}.\sqrt{(m^2z^2+nz+a^2}]+\frac{\left(\frac{B}{z}+C+Dz\right)dz}{\sqrt{(2z-1)}.\sqrt{(m^2z^2+nz+a^2)}}$, & j'ai la transformée $a^2=(2\lambda+3)m^2Az^{\lambda+4}+(\lambda+1)(2n-m^2)Az^{\lambda+3}+(\lambda+\frac{1}{2})(2a^2-n)Az^{\lambda+2}-a^2\lambda Az^{\lambda+1}+Bz+Cz^2+Dz^3$, qui montre évidemment qu'on ne peut donner à λ d'autre valeur que celle-ci, $\lambda=-1$. Donc $a^2=(m^2A+D)z^3+Cz^2-\left(\frac{2a^2-n}{2}A-B\right)z+a^2A$, d'où il sera bien facile de tirer $A=1$; $B=\frac{2a^2-n}{2}$, $C=0$, $D=-m^2$; & il ne restera plus à intégrer que les deux différentielles $\frac{(2a^2-n)dz}{2z\sqrt{(2z-1)}.\sqrt{(m^2z^2+nz+a^2)}}$,

$\frac{-m^2 z dz}{\sqrt{(2z-1)}\cdot\sqrt{(m^2z^2+nz+a^2)}}$, dont la seconde dépend de la rectification des sections coniques, & la premiere de la rectification des sections coniques & de la quadrature de la courbe du troisiéme ordre dont il vient d'être question. On trouvera dans un supplément aux Mémoires de Berlin de 1746 & 1748, imprimé dans le premier tome des Opuscules de M. d'Alembert, d'autres recherches sur cette matiere.

CHAPITRE VIII.

De la séparation des variables dans les équations différentielles.

72. NOUS avons parcouru, nº. 47, quelques cas simples où il est possible de séparer les variables dans les équations différentielles. Nous avons vu que le Probléme n'avoit pas de difficulté lorsque l'équation étoit linéaire & du premier ordre, telle que $dy + Py\,dx = Q\,dx$, où P & Q sont fonctions de x & de constantes. Je remarquerai en passant que l'équation $dy + Py\,dx = Qy^{n+1}dx$ se ramene à la précédente, en faisant $\frac{1}{y^n} = z$.

Le Problême n'a pas plus de difficulté lorsque l'équation du premier ordre est homogène, ou qu'on peut la rendre telle comme nous avons fait celle-ci, $dx(e+fx+gy) = dy(h+ix+ky)$. Soit proposé

$dx(ay^n x^m + by^{n'} x^{m'} + cy^{n''} x^{m''} + \&c) = dy(fy^\nu x^\mu + gy^{\nu'} x^{\mu'} + hy^{\nu''} x^{\mu''} + \&c$; on fera $y = z^\theta$ & $x = u^\sigma$, ce qui donnera la transformée $\sigma u^{\sigma - 1} du(az^{\theta n} u^{\sigma m} + bz^{\theta n'} u^{\sigma m'} + cz^{\theta n''} u^{\sigma m''} + \&c) = \theta z^{\theta - 1} dz(fz^{\theta \mu} u^{\sigma \mu} + gz^{\theta \nu'} u^{\sigma \mu'} + hz^{\theta \nu''} u^{\sigma \mu''} + \&c)$, qui feroit homogène si $\sigma - 1 + \theta n + \sigma m = \sigma - 1 + \theta n' + \sigma m' = \sigma - 1 + \theta n'' + \sigma m''$ &c $= \theta - 1 + \theta \nu + \sigma \mu = \theta - 1 + \theta \nu' + \sigma \mu' = \theta - 1 + \theta \nu'' + \sigma \mu''$ &c. On tire delà qu'on rendra la propofée homogène en faifant $y = z^{\frac{m' - m}{n - n'}}$ ou $x = u^{\frac{n' - n}{m - m'}}$, pourvu que toutes ces équations $\frac{m' - m}{n - n'} = \frac{m'' - m}{n - n''}$ &c $= \frac{\mu - m - 1}{n - \nu - 1} = \frac{\mu' - m - 1}{n - \nu' - 1} = \frac{\mu'' - m - 1}{n - \nu'' - 1}$ &c, aient lieu en même-temps. Je prens pour exemple l'équation $ay^2 x^2 dx + bdx + cyx dx = fx^4 y^2 dy$; je la compare avec l'équation générale, & j'ai $n = m = 2$, $n' = m' = 0$, $n'' = m'' = 1$, $\mu = 4$, $\nu = 2$; donc la propofée a les conditions requifes, & je pourrai la rendre homogène en faifant $y = \frac{1}{z}$; elle devient par cette fubftitution $ax^2 dx + bz^2 dx + czx dx + \frac{fx^4 dz}{z^2} = 0$.

Soit cette autre équation $dy + y^2 dx = ax^m dx$ qui eft connue des Géometres fous le nom d'équation du Comte Riccati. Il fuit de ce qui précéde qu'on pourra la rendre homogène, dans le cas de $m = -2$, en faifant $y = \frac{1}{z}$; elle devient par cette fubftitution $dz + \left(1 - \frac{az^2}{x^2}\right) dx = 0$, d'où l'on tire, en fuppofant $z = ux$, $\frac{dx}{x} = \frac{-du}{1 + u - au^2}$. Mais il y

a une infinité d'autres cas où il eſt poſſible de ſéparer les variables dans l'équation de Riccati; le plus ſimple de tous eſt celui où $m=0$, & où cette équation donne ſans aucune préparation $dx=\frac{dy}{a-y^2}$. Pour en trouver d'autres, je fais $y=\frac{\zeta}{z}$, & la propoſée devient $-\zeta dz+\zeta^2 dx=ax^m z^2 dx$; je fais enſuite $x^{m+1}=u$, $\frac{a}{m+1}=\zeta$, & je la change en celle ci, $dz+z^2 du=\frac{\zeta^2}{m+1}u^{\frac{-m}{m+1}}du$, qui m'apprend que ſi dans la propoſée on peut ſéparer les variables lorſque $m=n$, on les ſéparera auſſi lorſque $m=\frac{-n}{n+1}$. Je ſuppoſerai encore $y=\frac{1}{x}-\frac{z}{x^2}$, & la propoſée deviendra $dz-\frac{z^2dx}{x^2}=-ax^{m+2}dx$, dans laquelle ſi nous faiſons $x=\frac{1}{u}$, nous aurons cette transformée $dz+z^2du=au^{-m-4}du$, qui nous apprend que ſi dans la propoſée on peut ſéparer les variables lorſque $m=n$, on les ſéparera auſſi lorſque $m=-n-4$, & nous venons de voir qu'alors on pouvoit auſſi les ſéparer lorſque $m=\frac{-n}{n+1}$. Ainſi un ſeul cas étant connu, celui où $m=0$, par exemple, les deux formules $m=-n-4$ & $m=\frac{-n}{n+1}$ en feront trouver une infinité d'autres. En faiſant $n=0$ dans la premiere, on trouve que la ſéparation eſt poſſible lorſque $m=-4$; on trouve, en faiſant $n=-4$ dans la ſeconde,

que la séparation est possible lorsque $m = -\frac{4}{3}$; & en continuant de même, on trouvera qu'on peut toujours séparer les variables dans l'équation de Riccati lorsque m est un des nombres de la suite infinie $0, -4, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{8}{5}, -\frac{12}{5}, -\frac{12}{7}$, &c, nombres qui sont tous renfermés dans la formule générale $\frac{-4i}{2i \mp 1}$, où i est un nombre entier positif quelconque ou zero. Je reviens aux équations qui sont homogènes.

Si l'équation du second ordre $V = 0$ est homogène en $y, x, \frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$; en faisant $y = ux$ & $q = \frac{z}{x}$, on aura une équation entre z, u & p que je nomme $V' = 0$. Mais $dy = p\,dx = u\,dx + x\,du$, donc $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$; de plus $dp = q\,dx = \frac{z\,dx}{x}$, d'où l'on tire $\frac{dx}{x} = \frac{dp}{z}$ & $\frac{dp}{z} = \frac{du}{p-u}$. Avec cette équation & la précédente $V' = 0$, on fera en sorte d'en trouver une du premier ordre entre les variables p & u, dans laquelle s'il est possible de séparer p, on aura, au moyen de $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$, la valeur de x en u, & aussi la valeur de y en u, car $y = ux$. Pour rendre cela plus clair, nous nous proposerons les exemples suivans dans lesquels dx sera constant.

Intégrer l'équation du second ordre $x^2 d^2 y + x\,dx\,dy = ny\,dx^2$, qui n'est autre que $qx^2 + px = ny$. En faisant $y = ux$ & $qx = z$, on la change en celle-ci, $z + p = nu$; & substituant pour z sa valeur dans

$\frac{dp}{z} = \frac{du}{p-u}$, on a $(p-u)dp = (nu-p)du$, ou $nudu + udp - pdu = pdp$, équation homogène de laquelle on tirera la valeur de p en u; puis, à cause de $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$, on aura celle de x en fonction de la même quantité, & le Problême sera résolu.

Je prendrai pour second exemple l'équation $(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = ndxd^2y\sqrt{(x^2+y^2)}$ qui n'est autre que $(1+p^2)^{\frac{3}{2}} = nq\sqrt{(x^2+y^2)}$. En faisant $y = ux$ & $qx = z$, je la change en celle-ci, $(1+p^2)^{\frac{3}{2}} = nz\sqrt{(1+u^2)}$, & substituant pour z sa valeur dans $\frac{dp}{z} = \frac{du}{p-u}$, j'ai $n(p-u)dp\sqrt{(1+u^2)} = (1+p^2)^{\frac{3}{2}}du$, ou $\frac{n(p-u)}{\sqrt{(1+p^2)}}\frac{dp}{1+p^2} = \sqrt{(1+u^2)}.\frac{du}{1+u^2}$. Ayant ainsi préparé l'équation qu'il s'agit d'intégrer, je remarque que $\frac{dp}{1+p^2}$ & $\frac{du}{1+u^2}$ étant les différentielles de deux arcs dont l'un a pour tangente p, & l'autre pour tangente u, je ferai avec fruit ces substitutions $p = \text{tang. } b$ & $u = \text{tang. } \mathcal{C}$, qui donnent $\sqrt{(1+p^2)} = \frac{1}{\text{cos. } b}$, $\sqrt{(1+u^2)} = \frac{1}{\text{cos. } \mathcal{C}}$, $p - u = \frac{\text{sin. } b \text{ cos. } \mathcal{C} - \text{cos. } b . \text{sin. } \mathcal{C}}{\text{cos. } b \text{ cos. } \mathcal{C}} = \frac{\text{sin. } (b - \mathcal{C})}{\text{cos. } b \text{ cos. } \mathcal{C}}$, & qui changent par conséquent notre équation en celle-ci, $ndb \text{ sin. } (b - \mathcal{C}) = d\mathcal{C}$. Si l'on fait $b - \mathcal{C} = \phi$, l'équation précédente deviendra $ndb \text{ sin. } \phi = db - d\phi$,

d'où il sera facile de tirer $db = \frac{d\varphi}{1 - n \text{ sin. } \varphi}$, $d\mathcal{C} = \frac{d\varphi}{1 - n \text{ sin. } \varphi} - d\varphi$; & à cause de $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u} = \frac{d\mathcal{C} \text{ cos. } b}{\text{cos. } \mathcal{C} \text{ sin. } \varphi}$, on aura $\frac{dx}{x} = \frac{n\, d\varphi \text{ cos. } b}{\text{cos. } \mathcal{C}\,(1 - n \text{ sin. } \varphi)}$.

Nous avons enseigné à la fin du n°. 69, à intégrer $\frac{d\varphi}{1 - n \text{ sin. } \varphi}$. 1°. Lorsque $n = 1$, cette différentielle devient $\frac{d\varphi}{1 - \text{sin. } \varphi} = \frac{(1 - \text{sin. } \varphi)\, d\varphi}{\text{cos. } \varphi^2}$; dont l'intégrale est tang. $\varphi + \frac{1}{\text{cos. } \varphi} = \frac{1 + \text{sin. } \varphi}{\text{cos. } \varphi}$; donc $b = \frac{1 + \text{sin. } \varphi}{\text{cos. } \varphi} + c$; $\mathcal{C} = \frac{1 + \text{sin. } \varphi}{\text{cos. } \varphi} - \varphi + c$, & $\frac{dx}{x} = \frac{db \text{ cos. } b}{\text{cos. } (b - \varphi)}$. De l'équation $b - c = \frac{1 + \text{sin. } \varphi}{\text{cos. } \varphi}$, on tire sin. $\varphi = \frac{(b - c)^2 - 1}{(b - c)^2 + 1}$, cos. $\varphi = \frac{2(b - c)}{(b - c)^2 + 1}$, &, substituant ces valeurs, $\frac{dx}{x} = \frac{[(b - c)^2 + 1]\, db \text{ cos. } b}{2(b - c) \text{ cos. } b + [(b - c)^2 - 1] \text{ sin. } b}$; or le numérateur étant la différentielle du dénominateur, on a $\frac{x}{c'} = 2(b - c) \text{ cos. } b + [(b - c)^2 - 1] \text{ sin. } b$, c & c' sont les deux constantes arbitraires ajoutées en intégrant. Maintenant $\mathcal{C} = b - A$ tang. $\frac{(b - c)^2 - 1}{2(b - c)}$;

donc $u =$ tang. $\mathcal{C} = \frac{\text{tang. } b - \frac{(b - c)^2 - 1}{2(b - c)}}{1 + \frac{(b - c)^2 - 1}{2(b - c)} \text{ tang. } b}$, & par

conféquent $y = u\,x = c'\,(2\,(b - c)\ \text{fin.}\ b - [(b-c)^2 - 1]\ \text{cof.}\ b)$.

2°. Si $n > 1$, la différentielle $\frac{d\varphi}{1 - n\ \text{fin.}\ \varphi}$ a pour intégrale $\frac{1}{\sqrt{(n^2-1)}}$ $\log. \frac{\sqrt{[(n-1)(1+\text{fin.}\varphi)]} + \sqrt{[(n+1)(1-\text{fin.}\varphi)]}}{\sqrt{[(n-1)(1+\text{fin.}\varphi)} - \sqrt{[(n+1)(1-\text{fin.}\varphi)]}}$; donc, en fuppofant pour abréger $(b-c)\sqrt{(n^2-1)} = b'$, on aura $\frac{e^{b'}+1}{e^{b'}-1} = \frac{\sqrt{[(n-1)(1+\text{fin.}\varphi)]}}{\sqrt{[(n+1)(1-\text{fin.}\varphi)]}} = \frac{(n-1)(1+\text{fin.}\varphi)}{\text{cof.}\ \varphi\sqrt{(n^2-1)}}$. On tire de cette équation $\text{fin.}\ \varphi = \frac{e^{b'}+2n+e^{-b'}}{ne^{b'}+2+ne^{-b'}}$, $\text{cof.}\ \varphi = \frac{(e^{b'}-e^{-b'})\sqrt{(n^2-1)}}{ne^{b'}+2+ne^{-b'}}$; &, à caufe de $\frac{dx}{x} = \frac{n\,db\ \text{cof.}\ b}{\text{cof.}\ b\ \text{cof.}\ \varphi + \text{fin.}\ b\ \text{fin.}\ \varphi}$, $\frac{dx}{x} = \frac{n\,db\ \text{cof.}\ b(ne^{b'}+2+ne^{-b'})}{(e^{b'}-e^{-b'})\ \text{cof.}\ b\sqrt{(n^2-1)} + (e^{b'}+2n+e^{-b'})\ \text{fin.}\ b}$, dont le numérateur eft la différentielle du dénominateur; donc $x = c'[(e^{b'}-e^{-b'})\ \text{cof.}\ b\sqrt{(n^2-1)} + (e^{b'}+2n+e^{-b'})\ \text{fin.}\ b]$. Mais $\text{cof.}\ \mathcal{C} = \text{cof.}\ b\ \text{cof.}\ \varphi + \text{fin.}\ b\ \text{fin.}\ \varphi$, d'où l'on tire $\text{cof.}\ \mathcal{C}\,(ne^{b'}+2+ne^{-b'}) = \text{cof.}\ b(e^{b'}-e^{-b'})\sqrt{(n^2-1)} + \text{fin.}\ b(e^{b'}+2n+e^{-b'})$; on a donc auffi $x = c'\ \text{cof.}\ \mathcal{C}\,(ne^{b'}+2+ne^{-b'})$. Enfin, à caufe de $y = x\ \text{tang.}\ \mathcal{C}$, on a $y = c'\ \text{fin.}\ \mathcal{C}\,(ne^{b'}+2+ne^{-b'})$.

3°. Si $n < 1$, la différentielle $\frac{d\varphi}{1 - n\ \text{fin.}\ \varphi}$ a pour intégrale $\frac{-2}{\sqrt{(1-n^2)}} A\,\text{tang.} \frac{(n+1)\ \text{cof.}\ \varphi}{(1+\text{fin.}\ \varphi)\sqrt{(1-n^2)}}$; ou, à caufe de $\text{tang.}\ 2x = \frac{2\ \text{tang.}\ x}{1 - (\text{tang.}\ x)^2}$, elle a pour

pour intégrale $\frac{-1}{\sqrt{(1-n^2)}} A$ tang. $\frac{\text{cof.}\,\varphi\sqrt{(1-n^2)}}{\text{fin.}\,\varphi-n}$ $=\frac{1}{\sqrt{(1-n^2)}} A$ cof. $\frac{n-\text{fin.}\,\varphi}{1-n\,\text{fin.}\,\varphi}$. Donc en fuppofant pour abréger $(b-c)\sqrt{(1-n^2)}=b'$, on a $\frac{n-\text{fin.}\,\varphi}{1-n\,\text{fin.}\,\varphi}=$ cof. b', d'où l'on tire fin. $\phi=\frac{n-\text{cof.}\,b'}{1-n\,\text{cof.}\,b'}$, cof. $\phi=\frac{\text{fin.}\,b'\sqrt{(1-n^2)}}{1-n\,\text{cof.}\,b'}$. Mais $\frac{dx}{x}$ $=\frac{ndb\,\text{cof.}\,b}{\text{cof.}\,b\,\text{cof.}\,\varphi+\text{fin.}\,b\,\text{fin.}\,\varphi}=$ $\frac{ndb\,\text{cof.}\,b\,(1-n\,\text{cof.}\,b')}{\text{cof.}\,b\,\text{fin.}\,b'\sqrt{(1-n^2)}+\text{fin.}\,b\,(n-\text{cof.}\,b')}$, dont le numérateur eft encore la différentielle du dénominateur; donc $x=c'[\text{cof.}\,b\,\text{fin.}\,b'\sqrt{(1-n^2)}+\text{fin.}\,b\,(n-\text{cof.}\,b')]$, ou parce que cof. $\mathsf{C}=$ cof. b cof. $\phi+$ fin. b fin. ϕ, $x=c'$ cof. $\mathsf{C}(1-n\,\text{cof.}\,b')$ & $y=x$ tang. $\mathsf{C}=c'$ fin. $\mathsf{C}(1-n\,\text{cof.}\,b')$.

Si en faifant dans l'équation $V=0$, que nous ne fuppoferons plus être homogène, ces fubftitutions $y=ux^n$, $p=x^{n-1}t$, $q=x^{n-2}z$, on a une transformée qui foit telle qu'en donnant à n une certaine valeur, les x difparoiffent entierement; il fera encore facile de ramener la propofée au premier ordre. Soit, par exemple, cette équation du fecond ordre $x^4\frac{d^2y}{dx^2}=(x^3+2xy)\frac{dy}{dx}-4y^2$, qui devient $qx^4=p(x^3+2xy)-4y^2$; par les fubftitutions précédentes, on la change en celle-ci, $x^{n+2}z=x^{n+2}t+x^{2n}(2tu-4u^2)$, de laquelle x difparoîtra abfolument fi l'on fait $2n=n+2$, ou $n=2$, & on aura $z=t+2tu-4u^2$. Maintenant, à caufe de $y=ux^2$, $p=tx$, $q=z$, on a $xdu+2udx=$

$t\,dx$ & $t\,dx + x\,dt = z\,dx$, d'où l'on tire $\frac{dx}{x} = \frac{du}{t-2u} = \frac{dt}{z-t}$, équation qui devient, en mettant pour z sa valeur, $(t-2u)\,2u\,du = (t-2u)\,dt$. Cette équation donne $2u\,du = dt$ & $u^2 + c = t$; à moins qu'on ne suppose $t - 2u = 0$. Alors, à cause de $\frac{dx}{x} = \frac{du}{t-2u}$, on a $du = 0$, $u = c$, & $y = cx^2$ qui ne peut être qu'une intégrale particuliere de la proposée, puisqu'elle ne renferme qu'une seule constante arbitraire. Mais en mettant pour t sa valeur $u^2 + c$ dans $\frac{dx}{x} = \frac{du}{t-2u}$, on a $\frac{dx}{x} = \frac{du}{u^2 - 2u + c}$. Si l'intégrale doit être prise de maniere que $c = 1$, elle est log. $\frac{x}{c'} = \frac{1}{1-u} = \frac{x^2}{x^2 - y}$, si elle doit être prise de maniere que $c < 1$, elle est log. $\frac{x}{c'} = \frac{-1}{2\sqrt{(1-c)}}$ log. $\frac{u - 1 + \sqrt{(1-c)}}{u - 1 - \sqrt{(1-c)}} = \frac{-1}{2\sqrt{(1-c)}}$ log. $\frac{y - x^2(1 - \sqrt{(1-c)})}{y - x^2(1 + \sqrt{(1-c)})}$, d'où l'on tire $x = c'\left(\frac{y - x^2(1+\sqrt{(1-c)})}{y - x^2(1 - \sqrt{(1-c)})}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{(1-c)}}}$. Dans le troisiéme cas où $c > 1$, on peut mettre la différentielle sous cette forme $\frac{dx}{x} = \frac{du}{(u-1)^2 + c - 1}$, dont l'intégrale est log. $\frac{x}{c'} = \frac{1}{\sqrt{(c-1)}}$ A tang. $\frac{u-1}{\sqrt{(c-1)}}$, ou $\frac{u-1}{\sqrt{(c-1)}} = \frac{y - x^2}{x^2\sqrt{(c-1)}}$

$= \text{tang.}\left(\sqrt{(c-1)} \cdot \log. \frac{x}{c'}\right)$. Il faut remarquer que l'équation $y = cx^2$, qui satisfait à la proposée, ne peut d'aucune maniere être comprise dans son intégrale complette, & que par conséquent elle n'en est pas une des intégrales particulieres.

L'équation $V = 0$ est homogène seulement par rapport à y, p & q; c'est-à-dire qu'en faisant $p = uy$, $q = zy$, on aura une équation entre x, u & z, de laquelle on pourra tirer z égal à une fonction de x & u. Mais $p = uy$, donne $\frac{dy}{y} = u\,dx$, & $dp = udy + ydu = zydx$, d'où l'on tire $\frac{dy}{y} = \frac{zdx - du}{u}$, donc $du + u^2dx = zdx$, équation du premier ordre entre u & x, dans laquelle si on peut séparer u, on aura la valeur de y par l'équation $\frac{dy}{y} = u\,dx$. Je prendrai pour exemple l'équation $xyd^2y = ydxdy + xdy^2 + \frac{bxdy^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ où dx est constant. Cette équation devient $xyq = yp + xp^2 + \frac{bxp^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, laquelle, en faisant $p = uy$, $q = zy$, on changera en celle-ci, $xz = u + xu^2 + \frac{bxu^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, & il ne restera plus qu'à séparer les variables dans l'équation du premier ordre $du + u^2dx = \frac{udx}{x} + u^2dx + \frac{bu^2dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, qui n'est autre que $\frac{xdu - udx}{u^2} =$

$\frac{bxdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, dont l'intégrale complette eſt $c - \frac{x}{u} = -b\sqrt{(a^2-x^2)}$. On tire delà $u = \frac{x}{c+b\sqrt{(a^2-x^2)}}$; &, à cauſe de $\frac{dy}{y} = u\,dx$, $\frac{dy}{y} = \frac{xdx}{c+b\sqrt{(a^2-x^2)}}$. On fera $\sqrt{(a^2-x^2)} = t$; & parce que $x\,dx = -t\,dt$, on aura $\frac{dy}{y} = \frac{-tdt}{c+bt} = -\frac{dt}{b} + \frac{cdt}{b(c+bt)}$, dont l'intégrale complette eſt $\log.\frac{y}{c'} = -\frac{t}{b} + \frac{c}{b^2}\log.(c+bt) = -\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{b} + \frac{c}{b^2}\log.[c+b\sqrt{(a^2-x^2)}]$, qui eſt auſſi l'intégrale complette de la propoſée, puiſqu'elle renferme deux conſtantes arbitraires c & c'.

73. Nous avons démontré (n°. 51) que l'intégration complette des équations linéaires ſe réduiſoit à trouver n valeurs de y qui ſatisfiſſent à l'équation $Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots\ldots + U\frac{d^ny}{dx^n} = 0$. Si l'équation eſt du ſecond ordre, on peut la repréſenter par $My + N\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0$; or, en faiſant $y = ze^{-\int\frac{N}{2}dx}$, on la change en celle-ci, $\frac{d^2z}{dx^2} = \left(\frac{1}{2}\frac{dN}{dx} + \frac{N^2}{4} - M\right)z$, & il ne s'agit plus que d'intégrer complettement une équation de cette forme

$\frac{d^2 z}{dx^2} = \Pi z$, où Π eſt une fonction quelconque de x & de conſtantes. Nommons $z1$ & $z2$ deux valeurs de z qui ſatisfaſſent à l'équation précédente; & nous aurons pour ſon intégrale complette $z = az1 + bz2$, a & b étant les deux conſtantes arbitraires qu'il faut ajouter en intégrant. Mais ſi au lieu de deux valeurs particulieres de z, on n'en trouvoit qu'une, $z1$ par exemple, l'intégrale complette de la même équation ſeroit $z = z1 \left(a + b\int \frac{dx}{z1^2}\right)$; ces propoſitions peuvent aiſément ſe déduire de ce que nous avons dit dans l'article cité ſur les équations du ſecond ordre. Tout ſe réduit donc à trouver $z1$ & $z2$ exactement ou par approximation; & c'eſt de quoi nous allons nous occuper.

Soit d'abord l'équation $\frac{d^2 z}{dx^2} = \zeta x^{m-2} z$, on fera $z = Ax^{\lambda} + Bx^{\lambda+\mu} + Cx^{\lambda+2\mu} + Dx^{\lambda+3\mu} + \&c$, & on aura une transformée qu'on ne pourra ordonner que de la maniere ſuivante:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda.(\lambda-1).Ax^{\lambda-2} + (\lambda+\mu).(\lambda+\mu-1).Bx^{\lambda+\mu-2} + \\ \qquad - \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \zeta Ax^{\lambda+m-2} - \\ (\lambda+2\mu).(\lambda+2\mu-1).Cx^{\lambda+2\mu-2} + (\lambda+3\mu). \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \zeta Bx^{\lambda+\mu+m-2} - \\ (\lambda+3\mu-1).Dx^{\lambda+3\mu-2} + \&c \\ \qquad\qquad \zeta Cx^{\lambda+2\mu+m-2} - \&c \end{array}\right\} = 0.$$

On en tire qu'on peut donner à λ l'une ou l'autre de ces deux valeurs, $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$; que $\mu = m$; &, qu'en nommant $A1$, $B1$, &c les coefficiens qui répondent à $\lambda = 0$, $A2$, $B2$, &c, ceux qui répondent à $\lambda = 1$, on a pour les déterminer ces deux ſuites d'équations:

$m.(m-1).B1=\zeta A1$, $2m.(2m-1).C1=\zeta B1$,
$m.(m+1).B2=\zeta A2$, $2m.(2m+1).C2=\zeta B1$,
$3m.(3m-1).D1=\zeta C1$, &c,
$3m.(3m+1).D2=\zeta C2$, &c.

Ainſi, à cauſe de $A1$ & $A2$ qui reſtent indéterminés, il eſt clair que l'intégrale complette de la propoſée eſt $z=$

$$A1+\frac{\zeta A1x^m}{m.(m-1)}+\frac{\zeta^2 A1x^{2m}}{2m^2.(m-1).(2m-1)}+\frac{\zeta^3 A1x^{3m}}{2.3.m^3.(m-1).(2m-1).(3m-1)}+\&c$$

$$A2x+\frac{\zeta A2x^{m+1}}{m.(m+1)}+\frac{\zeta^2 A2x^{2m+1}}{2m^2.(m+1).(2m+1)}+\frac{\zeta^3 A2x^{3m+1}}{2.3.m^3(m+1).(2m+1).(3m+1)}+\&c.$$

La formule précédente ne donne rien pour le cas de $m=0$; mais alors la propoſée devient $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{\zeta z}{x^2}$, à laquelle on ſatisfait, en faiſant $z=x^\lambda$, λ étant donné par l'équation du ſecond degré, $\lambda.(\lambda-1)=\zeta$, d'où l'on tire $\lambda=\frac{1}{2}\pm\sqrt{(\zeta+\frac{1}{4})}$. Si $\zeta+\frac{1}{4}$ eſt une quantité poſitive, on a pour l'intégrale complette $z=\sqrt{x}(ax^{\sqrt{(\zeta+\frac{1}{4})}}+bx^{-\sqrt{(\zeta+\frac{1}{4})}})$; ſi $\zeta+\frac{1}{4}$ eſt une quantité négative, à cauſe de $x^{\pm\alpha\sqrt{(-1)}}=$ coſ. $(\alpha\log.x)\pm\sqrt{-1}$ ſin. $(\alpha\log.x)$, on a pour l'intégrale complette $z=\sqrt{x}.[a$ coſ. $(\sqrt{(\zeta+\frac{1}{4})}.\log.x)+b$ ſin. $(\sqrt{(\zeta+\frac{1}{4})}.\log.x)]$, qu'on peut mettre ſous cette forme plus ſimple $z=\sqrt{x}$ ſin. $(a+b\sqrt{(\zeta+\frac{1}{4})}.\log.x)$; enfin ſi $\zeta+\frac{1}{4}=0$, on n'a qu'une ſeule valeur particuliere de z, ſavoir $z=\sqrt{x}$,

& pour l'intégrale complette $z = \sqrt{x}\,(a + b \log. x)$, qu'on auroit trouvée en faisant $\mathit{6} + \frac{1}{4}$ infiniment petit dans $z = \sqrt{x}$ sin. $(a + b\sqrt{(\mathit{6} + \frac{1}{4})} \log. x)$.

En désignant par i un nombre entier positif, si l'on a $im - 1 = 0$ ou $im + 1 = 0$, la même formule ne donnera qu'une des intégrales particulieres de la proposée ; & pour trouver l'intégrale complette, il faudra avoir recours à l'équation $z = z1 \left(a + b\int\frac{dx}{z^2 1}\right)$ qui, à cause de $\int\frac{dx}{z^2 1}$, où $z1$ est une suite infinie, ne peut être d'aucun usage. Mais en y faisant plus d'attention, on verra que si dans certains cas une des valeurs particulieres de z a des termes qui soient $\frac{1}{0}$ ou infinis, c'est qu'alors l'intégrale complette doit renfermer des logarithmes, ce que nous n'avions pas supposé. On fera $z = z1 \log. x + (q) \ldots\ldots A'x^{\lambda} + B'x^{\lambda+\mu} + \&c$, $z1$ étant celle des intégrales particulieres qui est donnée par la formule précédente, & q une suite infinie dont on déterminera bientôt les exposans & les coefficiens. Cette substitution faite dans la proposée, on a $\frac{d^2 z1}{dx^2} \log. x + \frac{2}{x}\frac{dz1}{dx} - \frac{z1}{x^2} + \frac{d^2 q}{dx^2} = \mathit{6}x^{m-2} z1 \log. x + \mathit{6}x^{m-2} q$, qui à cause de $\frac{d^2 z1}{dx^2} = \mathit{6}x^{m-2} z1$, devient $\frac{d^2 q}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dz1}{dx} - \frac{z1}{x^2} = \mathit{6}x^{m-2} q$. En supposant successivement $z1 = A1 + B1\,x^m + C1\,x^{2m} + \&c$, & $q = A'1\,x^{\lambda} + B'1\,x^{\lambda+\mu} + C'1\,x^{\lambda+2\mu} + \&c$, $z1 = A2\,x + B2\,x^{m+1} + C2\,x^{2m+1} + \&c$, & $q = A'2\,x^{\lambda} + B'2\,x^{\lambda+\mu} + C'2\,x^{\lambda+2\mu} + \&c$; on a les deux transformées $\lambda.(\lambda - 1).A'1\,x^{\lambda-2} + (\lambda + \mu).(\lambda + \mu - 1)$.

$B'1x^{\lambda+\mu-2}+(\lambda+2\mu).(\lambda+2\mu-1).C'1x^{\lambda+2\mu-2}$
$+\&c - \mathcal{C}A'1x^{\lambda+m-2} - \mathcal{C}B'1x^{\lambda+\mu+m-2} -$
$\mathcal{C}C'1x^{\lambda+2\mu+m-2} - \&c - A1x^{-2} + (2m-1).$
$B1x^{m-2} + (4m-1).C1x^{2m-2} + \&c = 0,$
$\lambda.(\lambda-1).A'2x^{\lambda-2} + (\lambda+\mu).(\lambda+\mu-1).$
$B'2x^{\lambda+\mu-2} + (\lambda+2\mu).(\lambda+2\mu-1).C'2x^{\lambda+2\mu-2}$
$+\&c - \mathcal{C}A'2x^{\lambda+m-2} - \mathcal{C}B'2x^{\lambda+\mu+m-2} -$
$\mathcal{C}C'2x^{\lambda+2\mu+m-2} - \&c + A2x^{-1} + (2m+1).$
$B2x^{m-1} + (4m+1).C2x^{2m-1} + \&c = 0.$

Soit $m=1$, ou soit proposé d'intégrer $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\mathcal{C}z}{x}$; on fera usage de la seconde transformée qui deviendra

$$\begin{array}{lll} \lambda.(\lambda-1).A'2x^{\lambda-2} + (\lambda+\mu).(\lambda+\mu-1).B'2x^{\lambda+\mu-2} & + \\ - & \mathcal{C}A'2x^{\lambda-1} & - \\ + & A2x^{-1} & + \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (\lambda+2\mu).(\lambda+2\mu-1).C'2x^{\lambda+2\mu-2} & +\&c \\ \mathcal{C}B'2x^{\lambda+\mu-1} & -\&c \\ 3B2 & +\&c \end{array}\right\} = 0,$$

& qui étant ordonnée comme on vient de le faire; donne évidemment $\lambda=0$, $\mu=1$, & pour déterminer les coefficiens, cette suite d'équations $\mathcal{C}A'2 - A2 = 0$, $2C'2 - \mathcal{C}B'2 + 3B2 = 0$, $2.3D'2 - \mathcal{C}C'2 + 5C2 = 0$, &c. On voit que $B'2$ n'est point déterminé par ces équations, & que $A2$ ne l'est pas non plus dans l'intégrale particuliere dont on a fait usage; ainsi la proposée a pour intégrale complette $z = (A2x + B2x^2 + \&c)\log.x + A'2 + B'2x + \&c.$

Supposons $m=-1$, ou proposons-nous d'intégrer $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\mathcal{C}z}{x^3}$; nous ferons usage de la premiere transformée qui deviendra

$$\left.\begin{array}{l}\lambda.(\lambda-1).A'1\,x^{\lambda-2}+(\lambda+\mu).\lambda+(\mu-1).B'1\,x^{\lambda+\mu-2}+ \\ \qquad\qquad\qquad\;\; - \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \zeta A'1\,x^{\lambda-3} \quad - \\ \qquad\qquad\qquad\;\; - \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A1\,x^{-2} \quad - \\ (\lambda+2\mu).(\lambda+2\mu-1).C'1\,x^{\lambda+2\mu-2}+\&c \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \zeta B'1\,x^{\lambda+\mu-3} \;-\&c \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 3B1\,x^{-3} \qquad -\&c \end{array}\right\}=0;$$

& qui étant ordonnée comme nous venons de le faire, donne $\lambda=1$, $\mu=-1$, & pour déterminer les coefficiens, cette suite d'équations $\zeta A'1+A1=0$, $2C'1-\zeta B'1-3B1=0$, $2.3D'1-\zeta C'1-5C1=0$, &c. Or, comme $B'1$ reste indéterminé, & que $A1$ l'est dans l'intégrale particuliere dont nous avons fait usage; il est clair que la proposée a pour intégrale complette $z=\left(A1+\frac{B1}{x}+\frac{C1}{x^2}+\&c\right)$ $\log.x+A'1\,x+B'1+\frac{C'1}{x}+\&c.$

Si nous supposons $m=\frac{1}{2}$, c'est-à-dire si nous nous proposons d'intégrer $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{\zeta z}{x\sqrt{x}}$; pour cela nous ferons usage de la seconde transformée qui deviendra

$$\left.\begin{array}{l}\lambda.(\lambda-1)A'2\,x^{\lambda-2}+(\lambda+\mu).(\lambda+\mu-1).B'2\,x^{\lambda+\mu-2}+ \\ \qquad\qquad\quad\;\; - \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \zeta A'2\,x^{\lambda-\frac{3}{2}} \quad - \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \\ (\lambda+2\mu).(\lambda+2\mu-1).C'2\,x^{\lambda+2\mu-2}+\&c \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \zeta B'2\,x^{\lambda+\mu-\frac{3}{2}} \;-\&c \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad A2\,x^{-1} \qquad +\&c \end{array}\right\}=0,$$

& qui étant ordonnée comme nous venons de le faire, donne $\lambda=0$, $\mu=\frac{1}{2}$, & pour déterminer les coefficiens, cette suite d'équations, $\frac{1}{4}B'2+\zeta A'2=0$, $\zeta B'2-A2=0$, $\frac{3}{4}D'2-\zeta C'2+2B2=0$, &c.

Or, comme $A'2$ reste indéterminé, & que $A2$ l'est dans l'intégrale particuliere dont nous avons fait usage ; il s'ensuit que la proposée a pour intégrale complette $z =$ $(A2x + Bx^{\frac{1}{2}} + \&c) \log. x + A'2 + B'2x^{\frac{1}{2}} + \&c.$

Soit encore $m = -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire qu'on propose d'intégrer $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\beta z}{x^2\sqrt{x}}$. On fera usage de la premiere transformée qui deviendra

$$\begin{array}{l} \lambda.(\lambda-1).A'1\,x^{\lambda-2} + (\lambda+\mu).(\lambda+\mu-1)B'1\,x^{\lambda+\mu-2} + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \beta A'1\,x^{\lambda-\frac{5}{2}} \quad - \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \end{array}$$

$$(\lambda+2\mu).(\lambda+2\mu-1).\left.\begin{array}{l} C'1\,x^{\lambda+2\mu-2} + \&c \\ \beta B'1\,x^{\lambda+\mu-\frac{5}{2}} - \&c \\ A1\,x^{-2} \qquad - \&c \end{array}\right\} = 0,$$

& qui étant ordonnée comme on vient de le faire, donne $\lambda = 1$, $\mu = -\frac{1}{2}$, & pour déterminer les coefficiens, cette suite d'équations $\frac{1}{4}B'1 + \beta A'1 = 0$, $\beta B'1 + A1 = 0$, $\frac{3}{4}D'1 - \beta C'1 - 2B1 = 0$, &c. Or $C'1$ n'étant point déterminé, & $A1$ ne l'étant point non plus dans l'intégrale particuliere dont on a fait usage; il suit delà que $z = (A1 + B1x^{-\frac{1}{2}} + \&c) \log. x$ $+ A'1x + B'1x^{\frac{1}{2}} + \&c$, est l'intégrale complette de la proposée.

Je reprens l'équation $\frac{d^2z}{dx^2} = \beta x^{m-2}z$, & (n°. 32) je lui donne la forme suivante, $\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\frac{d^2x}{dx^2} =$ $\beta x^{m-2}z$. Je fais ensuite $x^{\frac{m}{2}} = \frac{m}{2}t$, d'où je tire $x^{\frac{m-2}{2}}dx = dt$, &, dt étant constant, $\frac{d^2x}{dx} = -$

$(m-2)\frac{dt}{mt}$. Par toutes ces ſubſtitutions, je change la propoſée en celle-ci, $\frac{d^2 z}{dt^2}+\frac{n}{t}\frac{dz}{dt}=\mathfrak{C} z$, ou j'ai fait pour abréger $\frac{m-2}{m}=n$. Lorſque $n=0$, on ſatisfait à cette équation en faiſant $z=e^{rt}$, r étant donné par l'équation du ſecond degré $r^2=\mathfrak{C}$; ſoit généralement $z=ye^{rt}$, on aura $\frac{d^2y}{dt^2}+2r\frac{dy}{dt}+r^2y+\frac{n}{t}\frac{dy}{dt}+\frac{nry}{t}=\mathfrak{C}y$, &, à cauſe de $r^2-\mathfrak{C}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}+\left(2r+\frac{n}{t}\right)\frac{dy}{dt}+\frac{nry}{t}=0$. On fera $y=At^\lambda+Bt^{\lambda+\mu}+Ct^{\lambda+2\mu}+$&c, pour avoir la transformée

$$\left.\begin{array}{l}\lambda.(\lambda+n-1).At^{\lambda-2}+(\lambda+\mu).(\lambda+\mu+n-1).Bt^{\lambda+\mu-2}+\\ \qquad+\qquad\qquad(2\lambda+n).rAt^{\lambda-1}\qquad+\\ (\lambda+2\mu).(\lambda+2\mu+n-1).Ct^{\lambda+2\mu-2}+\\ \qquad(2.(\lambda+\mu)+n).rBt^{\lambda+\mu-1}\quad+\\ (\lambda+3\mu).(\lambda+3\mu+n-1).Dt^{\lambda+3\mu-2}+\&c\\ \qquad(2.(\lambda+2\mu)+n).rCt^{\lambda+2\mu-1}+\&c\end{array}\right\}=0;$$

qui étant ordonnée comme on vient de le faire, donne d'abord $\lambda.(\lambda+n-1)=0$, d'où l'on tire $\lambda=0$ ou $\lambda=1-n$; puis $\mu=1$, & enſuite, pour détermi-ner les coefficiens, cette ſuite d'équations $(\lambda+1).(\lambda+n).B+(2\lambda+n).rA=0$, $(\lambda+2).(\lambda+n+1).C+(2.(\lambda+1)+n).rB=0$, $(\lambda+3).(\lambda+n+2)D+(2.(\lambda+2)+n).rC=0$, &c. On prendra $A=1$, ce qui eſt permis, car il n'eſt queſtion que de trouver deux intégrales particu-lieres de la propoſée; puis en faiſant pour plus de com-

modité $1-n=\nu$, on aura ces deux valeurs de y, savoir $y=1-rt+\frac{3-\nu}{2.(2-\nu)}r^2t^2-\frac{(3-\nu).(5-\nu)}{2.3.(2-\nu).(3-\nu)}$ $r^3t^3+\frac{(3-\nu).(5-\nu).(7-\nu)}{2.3.4.(2-\nu).(3-\nu).(4-\nu)}r^4t^4$ — &c, & $y=t^\nu\left(1-rt+\frac{3+\nu}{2.(2+\nu)}r^2t^2-\right.$ $\frac{(3+\nu).(5+\nu)}{2.3.(2+\nu).(3+\nu)}r^3t^3+\frac{(3+\nu).(5+\nu).(7+\nu)}{2.3.4.(2+\nu).(3+\nu).(4+\nu)}$ $\left.r^4t^4-\&c\right)$. A cause de $\frac{m-2}{m}=n=1-\nu$, la proposée devient $\frac{d^2z}{dx^2}+6x^{\frac{2(1-\nu)}{\nu}}z$, & on a $t=\nu x^{\frac{1}{\nu}}$; de plus, r étant égal à $\pm\sqrt{6}$, on a ces deux intégrales particulieres $z1=y1\,e^{t\sqrt{6}}$, $z2=y2\,e^{-t\sqrt{6}}$, & pour intégrale complette $z=ay1\,e^{t\sqrt{6}}+by2\,e^{-t\sqrt{6}}$; il est clair que par $y1$, $y2$ on entend ce que devient celle qu'on voudra des deux suites précédentes, en mettant pour r successivement $\sqrt{6}$ & $-\sqrt{6}$. Il pourra arriver que 6 soit une quantité négative, & qu'alors $\sqrt{6}$ soit une quantité imaginaire qu'on pourra représenter par $\sqrt{6'}\sqrt{-1}$; dans ce cas, si on représente la valeur de $y1$ par $y'1+y'2\sqrt{-1}$, celle de $y2$ sera $y'1-y'2\sqrt{-1}$, & on aura pour l'intégrale complette de la proposée $z=a(y'1+y'2\sqrt{-1})e^{t\sqrt{6'}\sqrt{-1}}+b(y'1-y'2\sqrt{-1})e^{-t\sqrt{6'}\sqrt{-1}}$. En se rappellant que $e^{\pm t\sqrt{6'}\sqrt{-1}}=\text{cos}.\,t\sqrt{6'}\pm\sqrt{-1}$ sin. $t\sqrt{6'}$, on verra aisément que l'intégrale précédente peut être changée en celle-ci, $z=(a+b)$ $(y'1 \text{ cos}.\,t\sqrt{6'}-y'2 \text{ sin}.\,t\sqrt{6'})+(a-b)\sqrt{-1}$. $(y'1 \text{ sin}.\,t\sqrt{6'}+y'2 \text{ cos}.\,t\sqrt{6'})$, qui, en faisant $a+b=c$ & $(a-b)\sqrt{-1}=c'$, ce qui est permis, puisque a & b sont arbitraires, devient $z=c(y'1 \text{ cos}.\,t\sqrt{6'}-$

$y'2$ fin. $t\sqrt{\mathfrak{C}'}) + c'(y'1$ fin. $t\sqrt{\mathfrak{C}'} + y'2$ cof. $t\sqrt{\mathfrak{C}'})$.

Lorfque ν fera un nombre impair pofitif, la premiere des deux fuites précédentes fe terminera ; ce fera la feconde lorfque ce nombre impair fera négatif; il en faut excepter les deux cas où ν feroit ± 1. Si $\nu = 1$, l'équation à intégrer eft $\frac{d^2 z}{dx^2} = \mathfrak{C} z$, à laquelle on fatisfait en prenant $z = e^{\lambda x}$, λ étant donné par l'équation du fecond degré $\lambda^2 = \mathfrak{C}$. Ainfi la propofée a pour intégrale complette $z = a e^{x\sqrt{\mathfrak{C}}} + b e^{-x\sqrt{\mathfrak{C}}}$; & lorfque $\sqrt{b}$ eft une quantité imaginaire que je repréfenterai par $\sqrt{\mathfrak{C}'}\sqrt{-1}$ cette intégrale devient $z = a$ cof. $x\sqrt{\mathfrak{C}'} + b$ fin. $x\sqrt{\mathfrak{C}'}$. Si $\nu = -1$, ou fi l'on a à intégrer $\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\mathfrak{C} z}{x^4}$; on fera $z = x^\lambda e^{\mu x^{\lambda'}}$, & on aura la transformée $\lambda.(\lambda - 1).x^{\lambda-2} + \mu\lambda'(2\lambda + \lambda' - 1) x^{\lambda+\lambda'-2} + \mu^2\lambda'^2 x^{\lambda+2\lambda'-2} = \mathfrak{C} x^{\lambda-4}$, qu'on rendra identique en faifant $\lambda = 1$, $\lambda' = -1$ & $\mu^2 = \mathfrak{C}$. On fatisfera donc à la propofée en faifant $z = x e^{\pm \frac{1}{x}\sqrt{\mathfrak{C}}}$; & par conféquent cette équation différentielle aura pour intégrale complette $z = x\left(a e^{\frac{1}{x}\sqrt{\mathfrak{C}}} + b e^{-\frac{1}{x}\sqrt{\mathfrak{C}}}\right)$; ou, lorfque $\sqrt{\mathfrak{C}}$ fera une quantité imaginaire $\sqrt{\mathfrak{C}'}\sqrt{-1}$, $z = x\left(a \text{ cof. } \frac{1}{x}\sqrt{\mathfrak{C}'} + b \text{ fin. } \frac{1}{x}\sqrt{\mathfrak{C}'}\right)$.

Soit $\nu = 3$, ou foit propofé d'intégrer $\frac{d^2 z}{dx^2} = \mathfrak{C} x^{\frac{-4}{3}} z$; on aura recours à la premiere fuite qui donnera $y = 1 - rt$, t étant égal à $3x^{\frac{1}{3}}$; &, à caufe de $r = \pm\sqrt{\mathfrak{C}}$, on aura $y1 = 1 - t\sqrt{\mathfrak{C}}$, $y2 = 1 + t\sqrt{\mathfrak{C}}$, & pour l'intégrale complette de la propofée $z = a e^{t\sqrt{\mathfrak{C}}}.(1 - t\sqrt{\mathfrak{C}}) + b e^{-t\sqrt{\mathfrak{C}}}(1 + t\sqrt{\mathfrak{C}})$.

Si $\sqrt{\mathcal{C}}$ eſt une quantité imaginaire $\sqrt{\mathcal{C}'}\sqrt{-1}$, cette intégrale complette ſera $z = c\,(\text{coſ.}\,t\sqrt{\mathcal{C}'} + t\sqrt{\mathcal{C}'}\,\text{ſin.}\,t\sqrt{\mathcal{C}'}) + c'\,(\text{ſin.}\,t\sqrt{\mathcal{C}'} - t\sqrt{\mathcal{C}'}\,\text{coſ.}\,t\sqrt{\mathcal{C}'})$.

Si $v = -3$, ou ſi l'on a à intégrer $\frac{d^2 z}{dx^2} = \mathcal{C} x^{\frac{-8}{3}} z$; il faudra ſe ſervir de la ſeconde ſuite qui donnera $y = t^{-3} - r t^{-2}$, t étant égal à $-3x^{-\frac{1}{3}}$; & on aura pour intégrale complette $z = a e^{t\sqrt{\mathcal{C}}}(t^{-3} - t^{-2}\sqrt{\mathcal{C}}) + b e^{-t\sqrt{\mathcal{C}}}(t^{-3} + t^{-2}\sqrt{\mathcal{C}})$; à moins que $\sqrt{\mathcal{C}}$ ne ſoit une quantité imaginaire $\sqrt{\mathcal{C}'}\sqrt{-1}$, cas auquel cette intégrale ſera $z = c\,(t^{-3}\,\text{coſ.}\,t\sqrt{\mathcal{C}'} + t^{-2}\sqrt{\mathcal{C}'}\,\text{ſin.}\,t\sqrt{\mathcal{C}'}) + c'(t^{-3}\,\text{ſin.}\,t\sqrt{\mathcal{C}'} - t^{-2}\sqrt{\mathcal{C}'}\,\text{coſ.}\,t\sqrt{\mathcal{C}'})$. Il ſeroit inutile de donner un plus grand nombre d'exemples.

En faiſant $z = e^{\int u\,dx}$, d'où l'on tire $u = \frac{1}{z}\frac{dz}{dx}$, on réduit l'équation $\frac{d^2 z}{dx^2} = b x^{\frac{2(1-v)}{v}} z$ à une du premier ordre que voici : $\frac{du}{dx} + u^2 = \mathcal{C} x^{\frac{2(1-v)}{v}}$, laquelle n'offre d'autre cas d'intégrabilité de l'équation de Riccati que ceux que nous avons déja trouvés. En effet, i étant un nombre entier poſitif, ſi pour exprimer que v eſt un nombre poſitif impair, on écrit $v = 2i + 1$, on aura $\frac{2(1-v)}{v} = \frac{-4i}{2i+1}$; & ſi pour exprimer que v eſt un nombre négatif impair, on écrit $v = -2i + 1$, on aura $\frac{2(1-v)}{v} = \frac{-4i}{2i-1}$. Maintenant lorſque $\mathcal{C}$ eſt poſitif, $z = ay1\,e^{t\sqrt{\mathcal{C}}} + by2\,e^{-t\sqrt{\mathcal{C}}}$; or à cauſe de $dt = x^{\frac{1-v}{v}} dx$, on a $\frac{dz}{dx} =$

$a\frac{dy1}{dx}e^{t\sqrt{6}}+b\frac{dy2}{dx}e^{-t\sqrt{6}}+x^{\frac{1-r}{r}}\sqrt{6}(ay1e^{t\sqrt{6}}-by2e^{-t\sqrt{6}})$; donc, en faisant $\frac{a}{b}=c$, on trouvera que dans ce cas-ci $u=\left(c\frac{dy1}{dx}e^{t\sqrt{6}}+\frac{dy2}{dx}e^{-t\sqrt{6}}+x^{\frac{1-r}{r}}\sqrt{6}[cy1e^{t\sqrt{6}}-y2e^{-t\sqrt{6}}]\right):(cy1e^{t\sqrt{6}}+y2e^{-t\sqrt{6}})$ est l'intégrale complette de l'équation de Riccati proposée. Lorsque 6 est une quantité négative que je représenterai par $-6'$, on a $z=y'1(c\,\text{cos}.\,t\sqrt{6'}+c'\,\text{sin}.\,t\sqrt{6'})+y'2(c'\,\text{cos}.\,t\sqrt{6'}-c\,\text{sin}.\,t\sqrt{6'})$, que je puis mettre sous cette forme plus simple : $z=ay'1\,\text{sin}.(t\sqrt{6'}+h)+ay'2\,\text{cos}.(t\sqrt{6'}+h)$, h étant un arc constant quelconque ; donc dans le cas présent l'équation de Riccati proposée a pour intégrale complette $u\left(=-\frac{1}{z}\frac{dz}{dx}\right)=\left(\frac{dy'1}{dx}\text{sin}.(t\sqrt{6'}+h)+\frac{dy'2}{dx}\text{cos}.(t\sqrt{6'}+h)+x^{\frac{1-r}{r}}\sqrt{6'}[y'1\,\text{cos}.(t\sqrt{6'}+h)-y'2\,\text{sin}.(t\sqrt{6'}+h)]\right):(y'1\,\text{sin}.(t\sqrt{6'}+h)+y'2\,\text{cos}.(t\sqrt{6'}+h))$. Pour rendre cela plus clair, nous proposerons les deux exemples suivans.

Premierement nous supposerons $r=5$, ou nous nous proposerons d'intégrer $\frac{du}{dx}+u^2=6x^{-\frac{8}{5}}$. Nous avons $y=1-rt+\frac{r^2t^2}{3}$ & $t=5x^{\frac{1}{5}}$; donc, à cause de $r=\pm\sqrt{6}$, $y1=1-t\sqrt{6}+\frac{6t^2}{3}$, $y2=1+t\sqrt{6}$

$+\frac{\beta t^2}{3}$, $\frac{dy1}{dx} = x^{-\frac{4}{5}}\left(\frac{2\beta t}{3} - \sqrt{\beta}\right)$, $\frac{dy2}{dx} = x^{-\frac{4}{5}}$ $\left(\frac{2\beta t}{3} + \sqrt{\beta}\right)$; & l'intégrale complette de la proposée, lorſque β eſt poſitif, ſera $u = \beta x^{-\frac{4}{5}}(c e^{t\sqrt{\beta}} [t^2\sqrt{\beta} - t] - e^{-t\sqrt{\beta}}[t^2\sqrt{\beta} + t]) : (c e^{t\sqrt{\beta}}[\beta t^2 - 3t\sqrt{\beta} + 3] + e^{-t\sqrt{\beta}}[\beta t^2 + 3t\sqrt{\beta} + 3])$. Dans l'autre cas nous aurons $y'1 = 1 - \frac{\beta' t^2}{3}$, $y'2 = -t\sqrt{\beta'}$, $\frac{dy'1}{dx} = -\frac{2\beta' t}{3} x^{-\frac{4}{5}}$, $\frac{dy'2}{dx} = -x^{-\frac{4}{5}}\sqrt{\beta'}$; & pour l'intégrale complette de la propoſée $u = \beta' x^{-\frac{4}{5}}(t^2\sqrt{\beta'} \operatorname{coſ.}(t\sqrt{\beta'} + h) - t \operatorname{ſin.}(t\sqrt{\beta'} + h)) : ([\beta' t^2 - 3] \operatorname{ſin.}(t\sqrt{\beta} + h) + 3t\sqrt{\beta'} \operatorname{coſ.}(t\sqrt{\beta'} + h))$.

Secondement, ſoit $v = -5$, ou ſoit propoſé d'intégrer $\frac{du}{dx} + u^2 = \beta x^{-\frac{12}{5}}$. On a $y = t^{-5} - rt^{-4} + \frac{r^2}{3} t^{-3}$ & $t = -5x^{\frac{-1}{5}}$; d'où l'on tire, à cauſe de $r = \pm\sqrt{\beta}$, $y1 = t^{-5} - t^{-4}\sqrt{\beta} + \frac{\beta}{3} t^{-3}$, $y2 = t^{-5} + t^{-4}\sqrt{\beta} + \frac{\beta}{3} t^{-3}$, $\frac{dy1}{dx} = x^{\frac{-6}{5}}$ $(-5t^{-6} + 4t^{-5}\sqrt{\beta} - \beta t^{-4})$, $\frac{dy^2}{dx} = x^{\frac{-6}{5}}$ $(-5t^{-6} - 4t^{-5}\sqrt{\beta} - \beta t^{-4})$; & pour l'intégrale complette de la propoſée, lorſque β eſt poſitif, $u = x^{\frac{-6}{5}}(c e^{t\sqrt{\beta}}[-3 \cdot 5t^{-6} + 3 \cdot 5t^{-5}\sqrt{\beta} - 6\beta t^{-4} + \beta\sqrt{\beta} t^{-3}] - e^{-t\sqrt{\beta}}[3 \cdot 5t^{-6} + 3 \cdot 5t^{-5}\sqrt{\beta} + 6\beta t^{-4} + \beta\sqrt{\beta} t^{-3}]) : (c e^{t\sqrt{\beta}}[3t^{-5} - 3t^{-4}\sqrt{\beta} + \beta t^{-3}] + e^{-t\sqrt{\beta}}[3t^{-5} + 3t^{-4}\sqrt{\beta} + \beta t^{-3}])$.

Lorſque

Lorſque ϵ eſt une quantité négative $-\epsilon'$, on a $y'1 = t^{-5} - \frac{\epsilon'}{3} t^{-3}$, $y'2 = -t^{-4}\sqrt{\epsilon'}$, $\frac{dy'1}{dx} = x^{\frac{-6}{5}} (-5t^{-6} + \epsilon' t^{-4})$, $\frac{dy'2}{dx} = 4t^{-5} x^{-\frac{6}{5}} \sqrt{\epsilon'}$; & pour l'intégrale complette de la propoſée $u = x^{-\frac{6}{5}} ([3 \cdot 5 t^{-6} + 6\epsilon' t^{-}]$ ſin. $(t\sqrt{\epsilon'} + h) - [3 \cdot 5 t^{-5} \sqrt{\epsilon'} - \epsilon' \sqrt{\epsilon'} t^{-}]$ coſ. $(t\sqrt{\epsilon'} + h)) : ([-3t^{-5} + \epsilon' t^{-3}]$ ſin. $(t\sqrt{\epsilon'} + h) + 3t^{-4}\sqrt{\epsilon'}$ coſ. $(t\sqrt{\epsilon'} + h))$.

On voit que la méthode des ſéries peut être d'un grand uſage pour ſéparer les variables dans les équations différentielles. Soit encore propoſé de trouver de cette maniere les cas d'intégrabilité de l'équation $(a + bx^n) x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (c + ex^n) x \frac{dy}{dx} + (f + gx^n) y = 0$. On fera $y = Ax^\lambda + Bx^{\lambda+\mu} + Cx^{\lambda+2\mu} + \&c$, & on aura la transformée $(a\lambda.(\lambda - 1) + c\lambda + f) Ax^\lambda + (a.(\lambda+\mu).(\lambda+\mu-1) + c.(\lambda+\mu) + f) Bx^{\lambda+\mu} + (a.(\lambda+2\mu).(\lambda+2\mu-1) + c.(\lambda+2\mu) + f) Cx^{\lambda+2\mu} + \&c + (b\lambda.(\lambda-1) + e\lambda + g) Ax^{\lambda+n} + (b.(\lambda+\mu).(\lambda+\mu-1) + e.(\lambda+\mu) + g) Bx^{\lambda+\mu+n} + (b.(\lambda+2\mu).(\lambda+2\mu-1) + e.(\lambda+2\mu) + g) Cx^{\lambda+2\mu+n} + \&c = 0$, qu'on ordonnera d'abord en mettant le premier terme de la ſeconde ſuite ſous le deuxiéme terme de la premiere, ce qui donnera $\mu = n$ & λ par cette équation du ſecond degré (a) . . . . $a\lambda.(\lambda-1) + c\lambda + f = 0$; puis $B = -A \frac{b\lambda.(\lambda-1) + e\lambda + g}{2an\lambda + an.(n-1) + nc}$,

$$C = -B \frac{b.(\lambda+n).(\lambda+n-1) + e(\lambda+n) + g}{4an\lambda + 2an.(2n-1) + 2cn},$$

$$D = -C. \frac{b.(\lambda+2n).(\lambda+2n-1) + e.(\lambda+2n) + g}{6an\lambda + 3an.(3n-1) + 3cn},$$

&c; il eſt clair que cette ſérie ſe terminera toutes les fois que l'on aura $(b) \ldots \ldots \ldots b.(\lambda+in).(\lambda+in-1)+e.(\lambda+in)+g=0$, i étant un nombre entier poſitif quelconque. On ordonnera la même transformée en mettant le premier terme de la premiere ſuite ſous le deuxiéme terme de la ſeconde, ce qui donnera $\mu=-n$ & λ par cette équation du ſecond degré $(c) \ldots \ldots \ldots b\lambda.(\lambda-1)+e\lambda+g=0$. On trouvera donc par ce ſecond arrangement, $B=A\,\frac{a\lambda.(\lambda-1)+c\lambda+f}{2bn\lambda-bn.(n+1)+en}$, $C=B\,\frac{a(\lambda-n).(\lambda-n-1)+c.(\lambda-n)+f}{4bn\lambda-2bn.(2n+1)+2ne}$, $D=C\,\frac{a(\lambda-2n).(\lambda-2n-1)+c.(\lambda-2n)+f}{6bn\lambda-3bn.(3n+1)+3en}$, &c, ſérie qui ſe terminera toutes les fois que l'on aura $(d) \ldots a.(\lambda-in).(\lambda-in-1)+c.(\lambda-in)+f=0$. On tire de l'équation a, $\lambda=\frac{a-c\pm\sqrt{[(a-c)^2-4af)]}}{2a}$, de l'équation b, $\lambda+in=\frac{b-e\pm\sqrt{[(b-e)^2-4bg]}}{2b}$; & pour équation de condition $in=\frac{c}{2a}-\frac{e}{2b}\pm\frac{\sqrt{[(b-e)^2-4bg]}}{2b}\mp\frac{\sqrt{[(a-c)^2-4af]}}{2a}$; on tire de l'équation c, $\lambda=\frac{b-e\pm\sqrt{[(b-e)^2-4bg]}}{2b}$, de l'équation d, $\lambda-in=\frac{a-c\pm\sqrt{[(a-c)^2-4af]}}{2a}$; ainſi l'on voit que le ſecond arrangement ne nous apprend rien de plus que le premier ſur les conditions d'intégrabilité de l'équation différentielle propoſée. Le premier arrangement ne donnera qu'une valeur de λ, & qu'une ſeule ſérie par conſéquent, dans les

deux cas de $a=0$ & de $(a-c)^2-4af=0$; le second arrangement ne donnera de même qu'une seule série dans les deux cas de $b=0$ & de $(b-e)^2-4bg=0$. Il pourroit se faire aussi qu'une des séries données par le premier arrangement, eût des termes qui fussent $\frac{1}{0}$ ou infinis, ce qui arrivera toutes les fois que l'on aura $2a\lambda+a.(in-1)+c=0$, ou, mettant pour λ sa double valeur, lorsqu'on aura $\pm \frac{\sqrt{[(a-c)^2-4af]}}{an}=i$, c'est-à-dire lorsque la différence des deux valeurs de λ sera exactement divisible par n. Il en sera de même des séries données par le second arrangement; & ces cas d'exception méritent d'être examinés avec le plus grand soin. Mais cherchons auparavant si par quelque substitution on ne pourroit pas trouver d'autres cas d'intégrabilité de notre équation.

Nous donnerons à cette équation la forme que voici, $(a+bx^n)x^2\frac{d^2y}{y}+(c+ex^n)x\frac{dydx}{y}+(f+gx^n)dx^2=0$; puis nous ferons $y=(a+bx^n)^{\lambda'}u$, d'où nous tirerons $\frac{dy}{y}=\frac{d^2u}{u}+\frac{\lambda' nbx^{n-1}dx}{(a+bx^n)}$, $\frac{d^2y}{y}=\frac{d^2u}{u}+\frac{2\lambda' nbx^{n-1}dxdu}{(a+bx^n)u}+\frac{\lambda' n.(n-1).bx^{n-2}dx^2}{a+bx^n}+\frac{\lambda'(\lambda'-1).n^2b^2x^{2n-2}dx^2}{(a+bx^n)^2}$. En substituant ces valeurs, nous aurons la transformée $(a+bx^n)x^2\frac{d^2u}{u}+(c+(e+2\lambda' nb).x^n)x\frac{dxdu}{u}+\Big(f+gx^n+\lambda' n.(n-1).bx^n+\frac{(c+ex^n)\lambda' nbx^n}{a+bx^n}+$

$\left.\frac{\lambda'.(\lambda'-1).n^2b^2x^{2n}}{a+bx^n}\right)dx^2=0$, qui eſt de la même forme que la propoſée; car en ſuppoſant le coefficient de dx^2 égal à $p+qx^n$, nous trouverons $p=f$, $q=g+bn\left(\frac{c}{a}+n-1\right)\left(\frac{bc-ae}{abn}+1\right)$, $\lambda'=\frac{bc-ae}{abn}+1$. Soit pour abréger $e+2\lambda'nb=e'$; la transformée deviendra $(a+bx^n)x^2\frac{d^2u}{u}+(c+e'x^n)x\frac{dxdu}{u}+(p+qx^n)dx^2=0$, dont les cas d'intégrabilité ſont renfermés dans l'équation $in=\frac{c}{2a}-\frac{e'}{2b}\pm\frac{\sqrt{[(b-e')^2-4bq]}}{2b}\mp\frac{\sqrt{[(a-c)^2-4ap]}}{2a}$, qu'on changera, en mettant pour e', p & q leurs valeurs, en celle-ci $in+n=\frac{e}{2b}-\frac{c}{2a}\pm\frac{\sqrt{[(b-e)^2-4bg]}}{2b}\mp\frac{\sqrt{[(a-c)^2-4af]}}{2a}$. Cette ſeconde équation ajoute aux conditions déja trouvées; & la propoſée ſera intégrable abſolument toutes les fois que la différence des deux quantités $\frac{e}{2b}$ & $\frac{c}{2a}$ augmentée ou diminuée de la différence des deux autres quantités $\frac{\sqrt{[(b-e)^2-4bg]}}{2b}$ & $\frac{\sqrt{[(a-c)^2-4af]}}{2a}$ ſera exactement diviſible par n. Alors il ſuffira de trouver une ſeule valeur particuliere de y; mais ſi y ne peut être donné que par approximation, il faudra trouver deux valeurs de cette quantité, & nous avons remarqué plus haut que dans pluſieurs cas les arrangemens

précédens ne donnoient chacun qu'une suite infinie.

Le premier arrangement ne donne qu'une suite infinie, lorsque la différence des deux valeurs de λ est exactement divisible par n; soit alors l'une de ces valeurs $\frac{a-c}{2a}+\frac{in}{2}=\lambda 1$, l'autre $\frac{a-c}{2a}-\frac{in}{2}$ sera $=\lambda 1-in$, & c'est cette seconde valeur qui étant substituée dans $y=Ax^{\lambda}+$ &c, rend des termes de cette série $\frac{1}{0}$ ou infinis. Supposons qu'en substituant la premiere, nous ayons $y1=A1x^{\lambda 1}+B1x^{\lambda 1+n}+$ &c; nous ferons $y=y1\log.x+q$, & en mettant dans la proposée pour y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, leurs valeurs tirées de l'équation précédente, nous aurons cette transformée,

$$\left.\begin{array}{l}(a+bx^n)x^2\frac{d^2y1}{dx^2}\\(c+ex^n)x\frac{dy1}{dx}\\(f+gx^n)\quad y1\end{array}\right\}\log.x+\begin{array}{l}+2(a+bx^n)x\frac{dy1}{dx}+\\(c+ex^n)x\quad y1+\\-(a+bx^n)\quad y1+\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}(a+bx^n)x^2\frac{d^2q}{dx^2}\\(c+ex^n)x\frac{dq}{dx}\\(f+gx^n)\quad q\end{array}\right\}=0,$$

qui, à cause de $(a+bx^n)x^2\frac{d^2y1}{dx^2}+(c+ex^n)x\frac{dy1}{dx}+(f+gx^n)y1=0$, se réduit à $2(a+bx^n)x\frac{dy1}{dy}+(c+ex^n)y1-(a+bx^n)y1+(a+bx^n)$

$$x^2 \frac{d^2 q}{dx^2} + (c + e x^n) x \frac{dq}{dx} + (f + g x^n) q = 0.$$

Représentons par $(A) x^{\lambda 1} + (B) x^{\lambda 1 + n} + \&c$, la suite qui provient des trois premiers termes de la derniere équation, c'est-à-dire que $(A) = (2 a \lambda 1 + c - a) A 1$, $(B) = (2a.(\lambda 1 + n) + c - a) B 1 + (2 b \lambda 1 + e - b) A 1$, $(C) = (2a.(\lambda 1 + 2n) + c - a) C 1 + (2b.(\lambda 1 + n) + e - b) B 1$, $(D) = (2a.(\lambda 1 + 3n) + c - a) D 1 + (2b.(\lambda 1 + 2n) + e - b) C 1$, &c. Supposons ensuite $q = A x^\lambda + B x^{\lambda + \mu} + \&c$; & nous aurons la transformée $(a\lambda.(\lambda - 1) + c\lambda + f) A x^\lambda + (a.(\lambda + \mu).(\lambda + \mu - 1) + c.(\lambda + \mu) + f) B x^{\lambda + \mu} + \&c + (b\lambda.(\lambda - 1) + e\lambda + g) A x^{\lambda + n} + (b.(\lambda + \mu).(\lambda + \mu - 1) + e.(\lambda + \mu) + g) B x^{\lambda + \mu + n} + \&c + (A) x^{\lambda 1} + (B) x^{\lambda 1 + n} + \&c + 0$. Si nous prenons pour λ celle des racines de l'équation $a\lambda.(\lambda - 1) + c\lambda + f + 0$ que nous avons représentée par $\lambda 1 - in$, & que nous fassions $\mu = n$, il nous faudra ordonner la transformée de maniere que le premier terme de la seconde suite soit sous le second terme de la premiere, & le premier terme de la troisiéme sous le terme $i + 1$ de la premiere; & par conséquent nous aurons pour déterminer les coefficiens les équations suivantes: $(2a\lambda + a.(n - 1) + c) n B + (b\lambda.(\lambda - 1) + e\lambda + g) A = 0$, $(2a\lambda + a.(2n - 1) + c) 2n C + (b.(\lambda + n).(\lambda + n - 1) + e.(\lambda + n) + g) B = 0$. ...... $(2a\lambda + a.(in - 1) + c) ink + (b.(\lambda + (i - 1).n).(\lambda + (i - 1).n - 1) + e.(\lambda + (i - 1).n) + g) I + (A) = 0$, &c. Mais dans le cas que nous examinons, $2e\lambda + a.(in - 1) + c = 0$; donc

$$(b.(\lambda + (i - 1).n).(\lambda + (i - 1)n - 1) + e.(\lambda + (i - 1)n) + g) I + (A) = 0,$$

$(i+1)an^2L+(b.(\lambda+in).(\lambda+in-1)+e.$
$(\lambda+in)+g)K+(B)=0,$
$(i+2)2an^2M+(b.(\lambda+(i+1).n).(\lambda+(i+1).$
$n-1)+e\ (\lambda+(i+1).n)+g)L+(C)=0,$
$(i+3)3an^2N+(b.(\lambda+(i+2).n).(\lambda+(i+2).$
$n-1)+e.(\lambda+(i+2).n)+g)M+(D)=0,$
&c. Ainſi lorſque la différence des deux valeurs de λ ſera diviſible par n, on pourra encore trouver l'intégrale complette de l'équation différentielle propoſée par deux ſéries aſcendantes; le cas où les deux valeurs de λ ſont égales, eſt compris dans le précédent, puiſqu'il eſt donné en faiſant $i=0$; il n'y aura donc que lorſque $a=0$, qu'il ne ſera pas poſſible de trouver l'intégrale complette demandée par deux ſéries aſcendantes.

Je propoſerai pour premier exemple d'intégrer complettement par deux ſéries aſcendantes l'équation du ſecond ordre $x^2d^2y+xdxdy+gx^nydx^2=0$. Ici $a=1$, $b=0$, $c=1$, $e=0$, $f=0$; & λ eſt donné par l'équation $\lambda.(\lambda-1)+\lambda=0$, dont les deux racines ſont égales, puiſqu'elles ſont l'une & l'autre $=0$. On aura $\lambda 1=0$, $B1=-\frac{gA1}{n^2}$, $C1=\frac{g^2A1}{4n^4}$, $D1=-\frac{g^3A1}{4.9\,n^6}$, &c, & $(A)=0$, $(B)=2nB1$, $(C)=4nC1$, $(D)=6nD1$, &c. Puiſque $i=0$, on effacera tous les termes qui dans la valeur de q précédent celui qui a K pour coefficient, & on aura pour déterminer les ſuivans, cette ſuite d'équations $n^2L+gK+(B)=0$, $4n^2M+gL+(C)=0$, $9n^2N+gM+(D)=0$, &c, d'où l'on tirera $L=\frac{2gA1}{n^3}-\frac{gk}{n^2}$, $M=-\frac{3g^2A1}{4n^5}+$

$\frac{g^2 K}{4n^4}$, $N = \frac{33 g^3 A1}{4.9.9 n^7} - \frac{g^3 K}{4.9 n^6}$, &c. Donc $y =$ $\left(1 - \frac{g x^n}{n^2} + \frac{g^2 x^{2n}}{4n^4} - \frac{g^3 x^{3n}}{4.9 n^6} + \text{\&c}\right) A1 \log. x$ $+ K + \left(\frac{2 g A1}{n^3} - \frac{g k}{n^2}\right) x^n - \left(\frac{3 g^2 A1}{4n^5} - \frac{g^2 k}{4n^4}\right)$ $x^{2n} + \left(\frac{33 g^3 A1}{4.9.9 n^7} - \frac{g^3 K}{4.9 n^6}\right) x^{3n} -$ &c, & cette intégrale eſt complette puiſqu'elle renferme deux conſtantes arbitraires $A1$ & K.

Soit encore propoſé d'intégrer complettement par deux ſéries aſcendantes l'équation du ſecond ordre $(1 - x^2) x^2 d^2 y - (1 + x^2) x dx dy + x^2 y dx^2 = 0$. Dans cet exemple $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$, $e = -1$, $f = 0$, $g = 1$, $n = 2$; & λ eſt donné par l'équation $\lambda . (\lambda - 1) - \lambda = 0$, dont les deux racines 0 & 2 ont pour différence 2 qui eſt diviſible par $n = 2$. Maintenant, à cauſe de $\lambda 1 = 2$, on aura $B1 = \frac{3 A1}{8}$, $C1 = \frac{3.3.5 A1}{8.24}$, $D1 = \frac{3.3.5.5.7 A1}{8.24.48}$, &c, & $(A) = 2 A1$, $(B) = 6 B1 - 4 A1$, $(C) = 10 C1 - 8 B1$, $(D) = 14 D1 - 12 C1$, &c. De plus, puiſque $i = 1$, il n'y a qu'un ſeul terme dans la valeur de q qui précéde celui qui a pour coefficient K; les coefficiens tant de ce terme que des ſuivans ſeront donnés par les équations $I + (A) = 0$, $8 L - 3 K + (B) = 0$, $24 M - 15 L + (C) = 0$, $48 N - 35 M + (D) = 0$, &c; d'où l'on tirera $I = -2 A1$, $L = \frac{7 A1}{4.8} + \frac{3 K}{8}$, $M = \frac{21 A1}{4.4.8} + \frac{15 K}{8.8}$, $N = \frac{3155 A1}{8.8.8.48} + \frac{5.35 K}{8.8.16}$, &c, & pour l'intégrale complette demandée,

$$y = \left(1 + \frac{3x^2}{8} + \frac{3.3.5x^4}{8.24} + \frac{3.3.5.5.7x^6}{8.24.48} + \&c\right)$$

$$A1x^2 \log. x - 2A1 + \left(\frac{7A1}{4.8} + \frac{3K}{8}\right)x^4 +$$

$$\left(\frac{21A1}{4.4.8} + \frac{15K}{8.8}\right)x^6 + \left(\frac{3155A1}{8.8.8.48} + \frac{5.35.K}{8.8.16}\right)$$

$x^8 + \&c.$

Par un procédé ſemblable, on trouvera deux ſéries deſcendantes lorſque la différence des racines de l'équation c ſera exactement diviſible par n, & lorſque les racines de cette même équation ſeront égales. Il n'y aura d'excepté que le cas où $b = 0$; c'eſt-à-dire que lorſque b ſera $= 0$, on ne pourra avoir l'intégrale complette que par deux ſéries aſcendantes; on ne pourra l'avoir que par deux ſéries deſcendantes, lorſque $a = 0$.

Si les deux racines des équations a ou c ſont imaginaires, en repréſentant l'une par $\lambda' + \lambda'' \sqrt{-1}$, l'autre ſera $\lambda' - \lambda'' \sqrt{-1}$; de plus, nous avons démontré que $x^{\pm \lambda'' \sqrt{-1}} = \text{coſ.}\, \lambda'' \log. x \pm \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, \lambda'' \log. x$; ainſi tant les deux ſéries aſcendantes que les deux ſéries deſcendantes pourront être tellement combinées que de l'une & de l'autre maniere on ait l'intégrale complette de la propoſée. Mais pour réſoudre dans ce cas-ci le Problême directement, on fera $y = z$ ſin. $h \log. x + u$ coſ. $h \log. x$, d'où l'on tirera $\frac{dy}{dx} =$ $\frac{dz}{dx}$ ſin. $h \log. x + \frac{hz}{x}$ coſ. $h \log. x + \frac{du}{dx}$ coſ. $h \log. x - \frac{hu}{x}$ ſin. $h \log. x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2}$ ſin. $h \log. x$ $+ \frac{2h}{x}\frac{dz}{dx}$ coſ. $h \log. x - \frac{hz}{x^2}$ coſ. $h \log. x - \frac{h^2z}{x^2}$

$\sin. h \log. x + \frac{d^2u}{dx^2} \cos. h \log. x - \frac{2h}{x}\frac{du}{dx} \sin.$ $h \log. x + \frac{hu}{x^2} \sin. h \log. x - \frac{h^2u}{x^2} \cos. h \log. x$. En substituant ces valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans l'équation $(a+bx^n)x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(c+ex^n)x\frac{dy}{dx}+(f+gx^n)y=0$, on aura une transformée dont, à cause des deux indéterminées u & z, on pourra faire deux équations. On les fera de maniere que $\sin. h \log. x$ & $\cos. h \log. x$ n'entrent ni dans l'une ni dans l'autre, & on aura $(\alpha)\ldots(a+bx^n)x^2\frac{d^2z}{dx^2}+(c+ex^n)x\frac{dz}{dx}+(f+gx^n)z-2h(a+bx^n)x\frac{du}{dx}+h(a+bx^n)u-h(c+ex^n)u-h^2(a+bx^n)z=0$, $(\mathcal{C})\ldots\ldots$ $(a+bx^n)x^2\frac{d^2u}{dx^2}+(c+ex^n)x\frac{du}{dx}+(f+gx^n)u+2h(a+bx^n)x\frac{dz}{dx}-h(a+bx^n)z+h(c+ex^n)z-h^2(a+bx^n)u=0$. Soit $z=Ax^\lambda+Bx^{\lambda+\mu}+\&c$, $u=A'x^\lambda+B'x^{\lambda+\mu}+\&c$, & soient substituées ces valeurs dans l'équation α, on aura la transformée $\{(a\lambda.(\lambda-1)+c\lambda+f-ah^2)A-(2ah\lambda-ah+ch)A'\}x^\lambda+\{(a.(\lambda+\mu).(\lambda+\mu-1)+c.(\lambda+\mu)+f-ah^2)B-(2ah.(\lambda+\mu)-ah+ch)B'\}x^{\lambda+\mu}+\{(a.(\lambda+2\mu).(\lambda+2\mu-1)+c.(\lambda+2\mu)+f-ah^2)C-(2ah.(\lambda+2\mu)-ah+ch)C'\}x^{\lambda+2\mu}+\&c+\{(b\lambda.(\lambda-1)+e\lambda+g-bh^2)A-(2bh\lambda-bh+eh)A'\}x^{\lambda+n}+\{(b.(\lambda+\mu).(\lambda+\mu-1)+e.(\lambda+\mu)+g-bh^2)B-(2bh.(\lambda+\mu)-bh+eh)B'\}x^{\lambda+\mu+n}+$

$\{(b.(\lambda+2\mu).(\lambda+2\mu-1)+e.(\lambda+2\mu)+g-bh^2)C-(2bh.(\lambda+2\mu)-bh+eh)C'\}$ $x^{\lambda+2\mu+n}+$ &c $=0$. En faiſant les mêmes ſubſtitutions dans l'équation $\mathfrak{C}$, on aura une autre transformée qui ne ſera que la précédente, dans laquelle on auroit mis A', B', &c, pour A, B, &c, & réciproquement, & dans laquelle on auroit changé le ſigne de h. Maintenant, ſi l'on veut u & z par deux ſuites aſcendantes, on fera dans chacune de ces transformées $\mu=n$, & on aura d'abord les deux équations

$$(a\lambda.(\lambda-1)+c\lambda+f-ah^2)A-(2a\lambda-a+c)hA'=0,$$
$$(a\lambda.(\lambda-1)+c\lambda+f-ah^2)A'+(2a\lambda-a+c)hA=0;$$

d'où l'on tirera néceſſairement ces deux-ci, $a\lambda.(\lambda-1)+c\lambda+f-ah^2=0$, $2a\lambda-a+c=0$; & par conſéquent $\lambda=\frac{a-c}{2a}$, $h^2=\frac{4af-(a-c)^2}{4a^2}$. A cauſe de h^2 qui doit être poſitif, cette ſolution exige que $4af>(a-c)^2$, c'eſt le cas où les deux racines de l'équation a ſont imaginaires. Les coefficiens A & A' reſteront indéterminés; & on aura pour déterminer les ſuivans cette ſuite d'équations,

$$(2a\lambda+a.(n-1)+c)nB-2ahnB'+(b\lambda.(\lambda-1)+e\lambda+g-bh^2)A-(2b\lambda-b+e)hA'=0,$$

$$(2a\lambda+a.(n-1)+c)nB'+2ahnB+(b\lambda.(\lambda-1)+e\lambda+g-bh^2)A'+(2b\lambda-b+e)hA=0;$$

$$(2a\lambda+a.(2n-1)+c)2nC-4ahnC'+(b.(\lambda+n).(\lambda+n-1)+e.(\lambda+n+g-bh^2)B-(2b.(\lambda+n)-b+e)hB'=0,$$

$$(2A\lambda+a.(2n-1)+c)2nC'+4ahnC+(b.(\lambda+n).(\lambda+n-1)+e.(\lambda+n)+g-bh^2)B'+(2b.(\lambda+n)-b+e)hB=0;$$

&c. De cette maniere on trouvera bien aisément l'intégrale complette de la proposée par deux séries ascendantes dans le cas où les deux racines de l'équation a sont imaginaires ; il ne seroit pas plus difficile de trouver cette intégrale complette par deux séries descendantes dans le cas où les deux racines de l'équation c seroient imaginaires, nous ne nous y arrêterons donc pas. Nous terminerons cet article par remarquer que ce seroit ici le lieu de parler des différentes méthodes d'approximation pour les équations différentielles que les Géométres ont imaginées pour résoudre plusieurs Problêmes des Mathématiques mixtes; mais nous ne pourrions le faire avec fruit sans entrer dans des détails qui nous écarteroient trop du but que nous nous sommes proposé ; & cette matiere est assez importante & assez étendue pour nous occuper tout le Cours suivant.

74. Une équation différentielle étant séparée, telle que celle-ci $\frac{dx}{\surd(1-x^2)} = \frac{dy}{\surd(1-y^2)}$, il n'y a plus qu'à intégrer chaque membre en ajoutant une constante arbitraire. Mais s'ensuit-il de ce que chacun des membres n'est point intégrable séparément, que l'équation ne le soit pas? M. Euler a fait voir dans les tomes VI & VII des nouveaux Mémoires de Péterbourg, & dans le premier volume de son Calcul Intégral, qu'il y a des cas où cette conclusion seroit fausse. Par exemple, en y faisant peu d'attention, on pourroit conclure que l'équation précédente n'est point intégrable algébriquement, puisque son intégrale est A sin. $x = A$ sin. $y + c$ ou A sin. $x = A$ sin. $y + A$ sin. a; cependant q & p étant les arcs qui ont pour sinus x & y, & c l'arc constant, si $q = p + c$, on a sin. $q =$ sin. p cos. $c +$ cos. p sin. c, ou $x =$

$y\sqrt{(1-a^2)}+a\sqrt{(1-y^2)}$, qui eſt une équation algébrique & l'intégrale complette de la propoſée.

L'équation différentielle $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}}$ (dont chacun des membres dépend de la rectification des ſections coniques comme nous l'avons démontré dans le Chapitre précédent), étant propoſée, M. Euler a imaginé qu'elle pouvoit avoir une intégrale algébrique qu'il a repréſentée par $A+B(x+y)+C(x^2+y^2)+Dxy+E(x^2y+xy^2)+Fx^2y^2=0$. En effet, en différentiant cette équation, on trouve $[B+Dy+Ey^2+2x(C+Ey+Fy^2)]dx+[B+Dx+Ex^2+2y(C+Ex+Fx^2)]dy=0$. On tire auſſi de la même équation $(C+Ey+Fy^2)x^2+(B+Dy+Ey^2)x+A+By+Cy^2=0$, ou $(C+Ey+Fy^2)^2 4x^2+(B+Dy+Ey^2)(C+Ey+Fy^2)4x+(B+Dy+Ey^2)^2=(B+Dy+Ey^2)^2-4(A+By+Cy^2)(C+Ey+Fy^2)$, & extrayant la racine quarrée de part & d'autre, $2x(C+Ey+Fy^2)+B+Dy+Ey^2=\pm\sqrt{[(B+Dy+Ey^2)^2-4(A+By+Cy^2)(C+Ey+Fy^2)]}$. On trouvera de la même maniere $2y(C+Ex+Fx^2)+B+Dx+Ex^2=\pm\sqrt{[(B+Dx+Ex^2)^2-4(A+Bx+Cx^2)(C+Ex+Fx^2)]}$; donc en mettant ces valeurs dans l'équation différentielle, on aura la transformée $dx\sqrt{[(B+Dy+Ey^2)^2-4(A+By+Cy^2)(C+Ey+Fy^2)]}=dy\sqrt{(B+Dx+Ex^2)^2-4(A+Bx+Cx^2(C+Ex+Fx^2)]}$, qui étant comparée à la propoſée $dx\sqrt{[a+by+cy^2+ey^3+fy^4]}=dy\sqrt{[a+bx+cx^2+ex^3+fx^4]}$; donnera pour déterminer A, B, C, D, E, F les équations

$B^2 - 4AC = a,$
$2BD - 4(BC + AE) = b,$
$2BE + D^2 - 4(C^2 + AF + BE) = c,$
$2DE - 4(CE + BF) = e,$
$E^2 - 4CF = f;$

& comme il y a ſix coefficiens & cinq équations, un de ces coefficiens reſtera indéterminé, & l'intégrale trouvée ſera complette. M. de la Grange a donné dans le quatriéme volume des Mémoires de Turin, une méthode directe pour intégrer cette même équation qui mérite d'autant plus d'attention qu'elle pourroit être d'uſage dans beaucoup d'autres cas.

Soit d'abord l'équation $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2)}}$; je fais chacun des membres $= dt$, & j'ai par-là les deux équations $dt = \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}}$ & $dt = \frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2)}}$, d'où je tire $\frac{dx^2}{dt^2} = a + bx + cx^2$ & $\frac{dy^2}{dt^2} = a + by + cy^2$. Je différentie chacune de ces équations en prenant dt pour conſtant, & il vient $\frac{2d^2x}{dt^2} = b + 2cx$, $\frac{2d^2y}{dt^2} = b + 2cy$, leſquelles étant ajoutées enſemble, donnent, après avoir fait $x + y = p$, $\frac{2d^2p}{dt^2} = 2b + 2cp$. Je multiplie cette équation par dp, & l'ayant intégrée enſuite, j'ai $\frac{dp^2}{dt^2} = k + 2bp + cp^2$, d'où je tire $\frac{dp}{dt} = \sqrt{(k + 2bp + cp^2)}$.

Mais $\frac{dp}{dt} = \frac{dx+dy}{dt^2} = \sqrt{(a+bx+cx^2)} + \sqrt{(a+by+cy^2)}$; donc $\sqrt{(a+bx+cx^2)} + \sqrt{(a+by+cy^2)} = \sqrt{[k+2b(x+y)+c(x+y)^2]}$, équation algébrique qui eſt l'intégrale complette de la propoſée. Au lieu d'ajouter enſemble les deux équations différentielles du ſecond ordre, on auroit pu retrancher l'une de l'autre, d'où l'on auroit tiré, en faiſant $x-y=q$, $\frac{2d^2q}{dt^2} = 2cq$, & en intégrant, $\frac{dq^2}{dt^2} = h + cq^2$, ou $\frac{dq}{dt} = \sqrt{(h+cq^2)}$. A cauſe de $q=x-y$, on auroit eu $\frac{dq}{dt} = \sqrt{(a+bx+cx^2)} - \sqrt{(a+by+cy^2)}$; de ſorte que l'équation intégrale auroit été $\sqrt{(a+bx+cx^2)} - \sqrt{(a+by+cy^2)} = \sqrt{[h+b(x-y)^2]}$, qui ne différe pas de la précédente, comme il ſera facile de s'en aſſurer par un calcul fort ſimple.

Plus généralement ſoit $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2)}} = \frac{dt}{T}$, T étant une fonction quelconque de x & y. Je tire de ces deux équations $\frac{T^2dx^2}{dt^2} = a+bx+cx^2$, $\frac{T^2dx^2}{dt^2} = a+by+cy^2$. Celles-ci étant différentiées, en faiſant dt conſtant, donnent $\frac{2TdTdx+2T^2d^2x}{dt^2} = b+2cx$, $\frac{2TdTdy+2T^2d^2y}{dt^2} = b+2cy$. J'ajoute enſemble ces deux dernieres équations, & en faiſant $x+y=p$, j'en tire celle-ci $\frac{TdTdp+T^2d^2p}{dt^2} = b+cp$. Si je fais $x-y=q$, & que je ſuppoſe

T une fonction de p & q telle que $dT = Mdp + Ndq$, j'aurai $\frac{dTdp}{dt^2} = \frac{Mdp^2 + Ndpdq}{dt^2}$. Mais $\frac{dpdq}{dt^2} = \frac{dx^2 - dy^2}{dt^2} = \frac{b.(x-y)+c.(x^2-y^2)}{T^2} = \frac{bq + cpq}{T^2}$; donc $\frac{dTdp}{dt^2} = \frac{Mdp^2}{dt^2} + \frac{Nq(b+cp)}{T^2}$. En substituant cette valeur dans $\frac{TdTdp + T^2d^2p}{dt^2} = b + cp$, il me vient $\frac{T^2(Mdp^2 + Td^2p)}{dt^2} = (b+cp)(T - Nq)$. Or, puisque T est indéterminé, si je fais $T = Nq$, l'équation précédente se réduira à celle-ci $\frac{Mdp^2 + Td^2p}{dt^2} = 0$; il est donc question d'examiner ce qui résultera de cette supposition. A cause de $N = \frac{dT}{dq}$, on a $\frac{1}{T}\frac{dT}{dq} = \frac{1}{q}$; d'où l'on tire en intégrant par rapport à q, & en ajoutant une fonction de p & de constantes, log. $T = \log. q + \log. P$ ou $T = Pq$. Mais $M\left(= \frac{dT}{dp}\right) = \frac{dP}{dp}q$; donc $\frac{Mdp^2 + Td^2p}{dt^2} = q\left(\frac{dP}{dp}\frac{dp^2}{dt^2} + \frac{Pd^2p}{dt^2}\right) =$ (à cause de $\frac{dP}{dp}dp = dP$) $q\frac{dpdP + Pd^2p}{dt^2} = \frac{qd.Pdp}{dt^2} = 0$. Donc $\frac{d.Pdp}{dt} = 0$, & $\frac{Pdp}{dt} = g$, g étant la constante arbitraire qu'on doit ajouter en

intégrant

intégrant. On a supposé $\frac{dp}{dt} = \frac{dx+dy}{dt} = \frac{\sqrt{(a+bx+cx^2)}+\sqrt{(a+by+cy^2)}}{T}$; donc, à cause de $\frac{p}{T} = \frac{1}{q} = \frac{1}{x-y}$, on a $\sqrt{(a+bx+cx^2)}+\sqrt{(a+by+cy^2)} = g(x-y)$; c'est l'intégrale précédente sous une forme beaucoup plus simple.

Nous ferons usage de la même méthode pour intégrer l'équation $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}}$; c'est-à-dire que nous supposerons chacun des membres de cette équation $= \frac{dt}{T}$, & nous aurons $\frac{T^2dx^2}{dt^2} = a+bx+cx^2+ex^3+fx^4$, $\frac{T^2dy^2}{dt^2} = a+by+cy^2+ey^3+fy^4$; d'où nous tirerons en différentiant comme nous avons fait ci-dessus,

$$\frac{2TdTdx+2T^2d^2x}{dt^2} = b+2cx+3ex^2+4fx^3,$$

$$\frac{2TdTdy+2T^2d^2y}{dt^2} = b+2cy+3ey^2+4fy^3.$$

Nous ajouterons ensemble ces deux dernieres équations, & après avoir fait $x+y=p$, $x-y=q$, $dT = Mdp+Ndq$, nous aurons

$$\frac{2TMdp^2+2TNdpdq+2T^2d^2p}{dt^2} = 2b+2cp+\frac{3e}{2}.(p^2+q^2)+f.(p^3+3pq^2).$$ Mais $\frac{dpdq}{dt^2} =$

$$\frac{dx^2-dy^2}{dt^2}=\frac{b(x-y)+c(x^2-y^2)+e(x^3-y^3)+f(x^4-y^4)}{T^2}$$

$$=\frac{bq+cpq+\frac{e}{4}(3p^2q+q^3)+\frac{f}{2}(p^3q+pq^3)}{T^2}\text{; donc,}$$

en subſtituant cette valeur, l'équation précédente deviendra $\frac{T^2(Mdp^2+Td^2p)}{dt^2}=(b+cp)(T-Nq)$ $+\frac{e}{4}(3T.(p^2+q^2)-N.(3p^2q+q^3))+\frac{f}{2}$ $(T.(p^3+3pq^2)-N.(p^3q+pq^3))$. Soit comme ci-deſſus $T-Nq=0$, & par conſéquent $T=Pq$, $N=P$, $M=q\frac{dP}{dp}$; on aura $\frac{T^2(Mdp^2+Td^2p)}{dt^2}=$ $P^2q^3.\frac{dPdp+Pd^2p}{dt^2}$, & par conſéquent $\frac{Pd.Pdp}{dt^2}=$ $\frac{e}{2}+fp$. Cette équation devient intégrable étant multipliée par $2dp$, & l'intégrale eſt $\frac{P^2dp^2}{dt^2}=ep+$ fp^2+g, d'où l'on tire $\frac{Pdp}{dt}=\sqrt{(ep+fp^2+g)}$. Mais $\frac{Pdp}{dt}=\frac{T.(dx+dy)}{qdt}=$

$$\frac{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}}{x-y}+\frac{\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}}{x-y};$$

on a donc pour l'intégrale complette demandée $\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}+\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}=(x-y)\sqrt{(e.(x+y)+f.(x+y)^2+g)}$.

Si on eut propoſé l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}}+$$

$\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}}=0$, on auroit trouvé pour intégrale $\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}-\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}=(x-y)\sqrt{(e.(x+y)+f(x+y)^2+g)}$.

Maintenant si l'on multiplie l'intégrale de la premiere équation par la différence des deux radicaux & l'intégrale de la seconde par la somme de ces mêmes radicaux, on aura ces deux équations $b(x-y)+c(x^2-y^2)+e(x^3-y^3)+f(x^4-y^4)=(x-y)\sqrt{(e.(x+y)+f.(x+y)^2+g)}[\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}-\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}]$, $b(x-y)+c(x^2-y^2)+e(x^3-y^3)+f(x^4-y^4)=(x-y)\sqrt{(e.(x+y)+f.(x+y)^2+g)}[\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}+\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}]$. On divisera la premiere par $x-y$, & on aura $b+c(x+y)+e(x^2+xy+y^2)+f(x^3+x^2y+xy^2+y^3)=\sqrt{(e.(x+y)+f(x+y)^2+g)}[\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}-\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}]$, qui étant ajoutée à celle-ci $(x-y)\sqrt{(e.(x+y)+f.(x+y)^2+g)}=\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}+\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}$ dont auparavant on multipliera les deux membres par $\sqrt{(e.(x+y)+f.(x+y)^2+g)}$, donnera $b+c.(x+y)+g.(x-y)+e.(2x^2+xy)+2f.(x^3+x^2y)=2\sqrt{(e.(x+y)+f.(x+y)^2+g)}.\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}$, & élevant chaque membre au quarré, $b^2-4ag+(2bc-4ae-2bg).(x+y)+(c^2-4af-2cg+g^2).(x^2+y^2)+2(c^2-4af-ba-g^2)xy+2(ce-2bf-eg).(x^2y+xy^2)+(e^2-4gf)x^2y^2=0$. En opérant sur la seconde équation comme on a fait sur la premiere, on parviendroit au même résultat; cette équation résultante, qui est exactement celle de M. Euler, est donc éga-

lement l'intégrale de l'une & de l'autre équations différentielles propofées.

M. de la Grange examine enfuite fi l'on ne pourroit pas trouver d'autres cas d'intégrabilité de l'équation $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$, que les précédens. Pour cela, foit toujours $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dt}{T}$; d'où l'on tire $\frac{T^2 dx^2}{dt^2} = X$, $\frac{T^2 dy^2}{dt^2} = Y$; & par la différentiation $\frac{2TdTdx + 2T^2 d^2 x}{dt^2} = \frac{dX}{dx}$, $\frac{2TdTdy + 2T^2 d^2 y}{dt^2} = \frac{dY}{dy}$. Je fuppoferai $x + y = p$, $x - y = q$, $dT = Mdp + Ndq$; & l'équation précédente deviendra $\frac{2T(Mdp^2 + Ndpdq) + 2T^2 d^2 p}{dt^2} = \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy}$, laquelle, à caufe de $dpdq = dx^2 - dy^2 = \frac{(X-Y)dt^2}{T^2}$, fe changera en celle-ci $\frac{2T(Mdp^2 + Td^2 p)}{dt^2} = \frac{dX}{dx} + \frac{dy}{dy} - \frac{2N(X-Y)}{T}$. Je mets pour M fa valeur $\frac{dT}{dp}$, & j'ai le premier membre de l'équation précédente $= 2T\frac{dT}{dp}.\frac{dp^2}{dt^2} + 2T^2\frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{Tdp^2}{dt^2}\right)}{dp}$, en n'oubliant pas que dans T on n'a fait varier que p feul. A caufe de $x + y = p$ & de $x - y = q$, on a $x = \frac{p+q}{2}$ &

$y = \frac{p-q}{2}$, de ſorte qu'en ne conſidérant que la variabilité de q, on peut mettre dans le ſecond membre de la même équation $\frac{2\,dX}{dq}$ & $-\frac{2\,dY}{dq}$ pour $\frac{dX}{dx}$ & $\frac{dY}{dy}$. Puiſque $N = \frac{dT}{dq}$, ce ſecond membre devient $= \frac{2\,d(X-Y)}{dq} - \frac{2(X-Y)}{T}\frac{dT}{dq} = 2T \frac{d\left(\frac{X-Y}{T}\right)}{dq}$, en ne perdant pas de vue qu'ici dans X, Y & T on n'a fait varier que q ſeul. Ainſi notre équation aura la forme ſuivante $\frac{d\left(\frac{T\,dp^2}{dt^2}\right)}{dp} = \frac{2Td\left(\frac{X-Y}{T}\right)}{dq}$; & pour pouvoir en tirer $\frac{dp}{dt}$, il faudra faire en ſorte qu'elle ne contienne que les variables p & q. M. de la Grange penſe qu'on ne pourra l'obtenir, 1°. qu'en ſuppoſant $T = PQ$, P étant une fonction quelconque de p, & Q une fonction quelconque de q, pour avoir en diviſant par Q^2, $\frac{d\left(\frac{P\,dp}{dt}\right)^2}{dp} = \frac{2\,d\left(\frac{X-Y}{Q}\right)}{Q\,dq}$. 2°. Qu'il faudra que le ſecond membre de cette équation ſoit fonction de la ſeule variable p, c'eſt-à-dire que l'on ait $\frac{d\left(\frac{X-Y}{Q}\right)}{Q\,dq} = f:(p)$; d'où l'on tire, en intégrant par rapport à q, $X-Y = Q(f:(p)\int Q\,dq + F:(p))$.

Si cette condition a lieu, on aura aussi $\frac{d\left(\frac{Pdp}{dt}\right)^2}{dp} = 2f:(p)$; & parce que cette équation ne renferme que p, l'intégration donnera $\left(\frac{Pdp}{dt}\right)^2 = g' + 2\int f:(p)\,dp$, g' étant une constante arbitraire. Donc $\frac{Pdp}{dt} = \sqrt{(g' + 2\int f:(p)\,dp)}$; mais $\frac{dp}{dt} = \frac{dx+dy}{dt} = \frac{\sqrt{X}+\sqrt{Y}}{PQ}$; donc la proposée aura pour intégrale $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = Q\sqrt{(g' + 2\int f:(p)\,dp)}$; il reste à voir quelle doit être la nature des fonctions X & Y pour que l'équation de condition $X - Y = Q[f:(p)\int Q\,dq + F:(p)]$ ait lieu.

Supposons d'abord qu'elles soient de la forme suivante, $X = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + gx^5 + \&c$, $Y = a + by + cy^2 + ey^3 + fy^4 + gy^5 + \&c$; alors $X - Y = b(x-y) + c(x^2 - y^2) + e(x^3 - y^3) + f(x^4 - y^4) + g(x^5 - y^5) + \&c$. Or, en faisant $x + y = p$ & $x - y = q$, d'où l'on tire $x = \frac{p+q}{2}$, $y = \frac{p-q}{2}$, nous avons $X - Y = bq + cpq + \frac{e}{4}(3p^2 + q^3) + \frac{f}{2}(p^3 q + pq^3) + \frac{g}{16}(5p^4 q + 10p^2 q^3 + q^5) + \&c$; donc pour que dans ce cas-ci l'équation de condition ait lieu, il faut nécessairement que $Q = q$, ce qui donne $\int Q\,dq = \frac{q^2}{2}$, puis $F:(p) = b + cp + \frac{3e}{4}p^2 + \frac{f}{2}p^3 + \frac{5g}{16}p^4 + \&c$, $f:(p) = \frac{e}{2} + fp + \frac{5g}{4}p^2 + \&c$, & tous les termes qui renferment des puissances de q plus élevées que la troisiéme nuls, ce qui ne peut être à moins que

le coefficient g & les suivans ne soient zero ; ou, ce qui revient au même, à moins que X & Y ne contiennent point d'autres puissances de x & de y que celles qui ne passent pas le quatriéme degré.

Si on suppose généralement $X = f:(2x) = f:(p+q)$, $Y = F:(2y) = F:(p-q)$; l'équation de condition deviendra $f:(p+q) - F:(p-q) = Q(f:(p)\int Q dq + F:(p))$. Je la différentie deux fois de suite, en ne faisant varier que p, & il me vient $f'':(p+q) - F'':(p-q) = Q(f'':(p)\int Q dq + F''(p))$; je différentie deux fois de suite la même équation en ne faisant varier que q, & il me vient $f'':(p+q) - F'':(p-q) = \frac{d^2(Q\int Q dq)}{dq^2} f:(p) + \frac{d^2 Q}{dq^2} F:(p)$. Donc $QF'':(p) + Qf'':(p)\int Q dq = \frac{d^2 Q}{dq^2} F:(p) + \frac{d^2(Q\int Q dq)}{dq^2} f:(p)$, équation qui doit être identique. Je ferai $\frac{d^2 Q}{dq^2} = -m^2 Q$, m^2 étant un coefficient constant quelconque ; cette équation du second ordre donnera $Q = a1$ fin. $(mq + b1)$, $a1$ & $b1$ étant aussi des constantes quelconques, & par conséquent $\int Q dq = -\frac{a1}{m}$ cof. $(mq + b1)$, $Q\int Q dq = -\frac{a^2 1}{2m}$ fin. $2(mq + b1)$. En mettant ces valeurs dans l'équation de condition, on la change en celle-ci $a1$ fin. $(mq + b1)(F'':(p) + m^2 F:(p)) - \frac{a^2 1}{2m}$ fin. $2(mq + b1)(f'':(p) + 4m^2 f:(p)) = 0$, qui devant être vraie indépendamment d'aucune équation entre p & q, donne $F''(p) + m^2 F:(p) = 0$, $f'':(p) + 4m^2 f:(p) = 0$; ou $\frac{d^2 F:(p)}{dp^2} = -m^2 F:(p)$,

$\frac{d^2f:(p)}{dp^2} = -4\,m^2f:(p)$; d'où l'on tire $F:(p) = a2$ fin. $(mp+b2)$, $f:(p) = a3$ fin. $2(mp+b3)$, $a2$, $b2$, $a3$, $b3$ étant des conftantes arbitraires. On mettra ces valeurs dans l'équation $f:(p+q) - F:(p-q) = Q(f:(p)\int Q\,dq + F:(p))$, & on aura $f:(p+q) - F:(p-q) = a1\,a2$ fin. $(mq+b1)$ fin. $(mp+b2) - \frac{a^2 1\,a3}{2m}$ fin. $2(mq+b1)$ fin. $2(mp+b3) = -\frac{a1\,a2}{2}$ (cof. $(m.(p+q) + b2 + b1)$ — cof. $(m.(p-q) + b2 - b1)) + \frac{a^2 1\,a3}{4m}$ (cof. $2(m.(p+q) + b3 + b1)$ — cof. $2(m.(p-q) + b3 - b1))$. On peut donc fuppofer $f:(p+q) = A + B$ cof. $(m.(p+q) + b2 + b1) + C$ cof. $2(m.(p+q) + b3 + b1)$, $F:(p-q) = A + B$ cof. $(m.(p-q) + b2 - b1) + C$ cof. $2(m.(p-q) + b3 - b1)$, A, B, C étant des conftantes quelconques; ou, mettant pour $p+q$ & $p-q$ leurs valeurs $2x$ & $2y$, on peut fuppofer que $X = A + B$ cof. $(2mx + b2 + b1) + C$ cof. $2(2mx + b3 + b1)$, $Y = A + B$ cof. $(2my + b2 - b1) + C$ cof. $2(2my + b3 - b1)$. Ce font-là les valeurs les plus générales que l'on puiffe donner à X & à Y, pour que l'équation $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ foit intégrable par la méthode précédente; à caufe de $\int f:(p)\,dp = \int a3\,dp$ fin. $2(mp+b3) = -\frac{a3}{2m}$ cof. $2(mp+b3)$, l'intégrale fera $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = a1$ fin. $(m.(x-y) + b1)\sqrt{[g' - \frac{a3}{m}}$ cof. $2(m.(x+y) + b3)]$, à laquelle, en faifant $2m = n$, je puis

donner la forme suivante : $\sqrt{X} + \sqrt{Y} =$
$\sin. \left(n . \frac{x-y}{2} + b1\right) \sqrt{[h - i \cos. (n . (x+y) + 2b3)]}$.

Soient $\cos. nx + \sin. nx \sqrt{-1} = u$, $\cos. ny + \sin. ny \sqrt{-1} = z$; on aura

$$\cos. nx = \frac{1+u^2}{2u}, \sin. nx = \frac{1-u^2}{2u} \sqrt{-1},$$

$$\cos. 2nx = \frac{1+u^4}{2u^2}, \sin. 2nx = \frac{1-u^4}{2u^2} \sqrt{-1},$$

$$\cos. ny = \frac{1+z^2}{2z}, \sin. ny = \frac{1-z^2}{2z} \sqrt{-1},$$

$$\cos. 2ny = \frac{1+z^4}{2z^2}, \sin. 2ny = \frac{1-z^4}{2z^2} \sqrt{-1};$$

& par conséquent

$$\cos. n(x+y) = \frac{1+u^2z^2}{2uz}, \sin. n(x+y) = \frac{1-u^2z^2}{2uz} \sqrt{-1},$$

$$\cos. \frac{n(x-y)}{2} = \frac{z+u}{2\sqrt{(zu)}}, \sin. \frac{n(x-y)}{2} = \frac{z-u}{2\sqrt{(zu)}} \sqrt{-1}.$$

Soient aussi $\cos. (b2 + b1) = D$, $\cos. (b2 - b1) = E$, $\cos. 2(b3 + b1) = F$, $\cos. 2(b3 - b1) = G$; on tire des deux premieres suppositions, $(2 \cos. b1 \sin. b1)^2 = (D+E)^2 (\sin. b1)^2 + (E-D)^2 (\cos. b1)^2$, qui devient $(\sin. 2b1)^2 = (D+E)^2 (\sin. b1)^2 + (E-D)^2 (\cos. b1)^2$, ou $1 - (\cos. 2b1)^2 = D^2 + E^2 - 2DE \cos. 2b1$, & donne $\cos. 2b1 = DE + \sqrt{(1 - D^2 - E^2 + D^2E^2)} = DE + \sqrt{(1-D^2)} . \sqrt{(1-E^2)}$; les deux autres donneront $\cos. 4b1 = FG + \sqrt{(1-F^2)} . \sqrt{(1-G^2)}$. Donc si l'on fait pour

abréger $DE+\sqrt{(1-D^2)}.\sqrt{(1-E^2)}=M$, $FG+\sqrt{(1-F^2)}.\sqrt{(1-G^2)}=N$, $FG-\sqrt{(1-F^2)}.\sqrt{(1-G^2)}=P$; on aura d'abord $N=2M^2-1$; & ensuite cos. $b1=\sqrt{\left(\frac{1+M}{2}\right)}$, sin. $b1=\sqrt{\left(\frac{1-M}{2}\right)}$, cos. $2b3=\frac{F+G}{2\text{cos. }2b1}=\sqrt{\left(\frac{1+P}{2}\right)}$, sin. $2b3=\sqrt{\left(\frac{1-P}{2}\right)}$. On donnera à X, à Y & à l'intégrale précédente la forme que voici, $X=A+B(\text{cos.}(b2+b1).\text{cos.}\,nx-\text{sin.}(b2+b1)\,\text{sin.}\,nx)+C(\text{cos.}\,2.(b3+b1).\text{cos.}\,2nx-\text{sin.}\,2.(b3+b1).\text{sin.}\,2nx)$, $Y=A+B(\text{cos.}\,b2-b1).\text{cos.}\,ny-\text{sin.}(b2-b1).\text{sin.}\,ny)+C(\text{cos.}\,2.(b3-b1).\text{cos.}\,2ny-\text{sin.}\,2.(b3-b1).\text{sin.}\,2ny)$, $\sqrt{X}+\sqrt{Y}=\left(\text{cos.}\,b1\,\text{sin.}\frac{n.(x-y)}{2}+\text{sin.}\,b1\,\text{cos.}\frac{n.(x-y)}{2}\right)\sqrt{[h-i(\text{cos.}\,2b3\,\text{cos.}\,n.(x+y)-\text{sin.}\,2b3\,\text{sin.}\,n.(x+y))]}$; & après avoir fait les substitutions nécessaires, on aura

$$X=A+B\left(D.\frac{1+u^2}{2u}-\sqrt{(D^2-1)}.\frac{1-u^2}{2u}\right)+C\left(F.\frac{1+u^4}{2u^2}-\sqrt{(F^2-1)}.\frac{1-u^4}{2u^2}\right),$$

$$Y=A+B\left(E.\frac{1+z^2}{2z}-\sqrt{(E^2-1)}.\frac{1-z^2}{2z}\right)+C\left(G.\frac{1+z^4}{2z^2}-\sqrt{(G^2-1)}.\frac{1-z^4}{2z^2}\right),$$

$$\sqrt{X}+\sqrt{Y}=\left(\sqrt{\left(\frac{-1-M}{2}\right)}.\frac{z-u}{2\sqrt{(zu)}}+\right.$$

$\sqrt{\left(\frac{1-M}{2}\right)} \cdot \frac{z+u}{2\sqrt{(zu)}}\Big)\sqrt{\Big(h-}$
$i\left[\sqrt{\left(\frac{1+P}{2}\right)} \cdot \frac{1+u^2 z^2}{2uz} - \frac{1-u^2 z^2}{2uz}\right]\Big)$.

Enfin, à caufe de $dx = \frac{du}{nu\sqrt{-1}}$, $dy = \frac{dz}{nz\sqrt{-1}}$; l'équation $dx : \sqrt{X} = dy : \sqrt{Y}$ deviendra
$du : \sqrt{[C.(F-\sqrt{(F^2-1)})+B.(D-\sqrt{(D^2-1)})}.$ $u+2Au^2+B.(D+\sqrt{(D^2-1)}).u^3+C.(F+\sqrt{(F^2-1)}).u^4) = dz\sqrt{(C.(G-\sqrt{(G^2-1)})+}$ $B.(E-\sqrt{(E^2-1)}).z+2Az^2+B.(E+\sqrt{(E^2-1)}).z^3+C.(G+\sqrt{(G^2-1)}).z^4)$, qui eft un peu plus générale que celle-ci, $dx : \sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)} = dy\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}$, puifque la premiere renferme fix coefficiens indéterminés (elle en renferme fept, dont quatre ont entr'eux une relation exprimée par l'équation $N = 2M^2 - 1$) tandis que l'autre n'en renferme que cinq.

Pour généralifer s'il eft poffible la méthode que nous venons d'expliquer, nous reprendrons les deux équations $\frac{dT}{T} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$ & $\frac{dT}{T} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$, dont nous prendrons les différentielles logarithmiques en regardant toujours dt comme conftant ; & nous aurons $\frac{d^2x}{dx} = \frac{dX}{2X} - \frac{dT}{T}$, $\frac{d^2y}{dy} = \frac{dY}{2Y} - \frac{dT}{T}$, ou

$$d^2x = \left(\frac{dX}{2Xdx} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dx}\right)dx^2 - \frac{1}{T}\frac{dT}{dy}dx\,dy,$$

$$d^2y = \left(\frac{dY}{2Ydy} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dy}\right)dy^2 - \frac{1}{T}\frac{dT}{dx}dx\,dy;$$

d'où l'on tirera, en mettant au lieu de dx^2 & dy^2 leurs valeurs $\frac{Xdt^2}{T^2}$ & $\frac{Ydt^2}{T^2}$,

$$d^2x = \frac{d(X:T^2)}{2dx}dt^2 - \frac{d.\log.T}{dy}dx\,dy,$$
$$d^2y = \frac{d(Y:T^2)}{2dy}dt^2 - \frac{d.\log.T}{dx}dx\,dy.$$

Soit Z une fonction quelconque de x, y, & supposons $dZ = Pdx + Qdy$; nous aurons, en différentiant de nouveau, & en faisant attention que $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, $d^2Z = Pd^2x + Qd^2y + \frac{dP}{dx}dx^2 + 2\frac{dP}{dy}dx\,dy + \frac{dQ}{dy}dy^2$, qui devient, en mettant pour dx^2, dy^2, d^2x, d^2y leurs valeurs, $d^2Z = \left(P\frac{d(X:T^2)}{2dx} + Q\frac{d(Y:T^2)}{2dy} + \frac{X}{T^2}\frac{dP}{dx} + \frac{Y}{T^2}\frac{dQ}{dy}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)\, dt^2 + \left(2\frac{dP}{dy} - P\frac{d.\log.T}{dy} - Q\frac{d.\log.T}{dx}\right) \ldots (\beta)\, dx\,dy$.
Donc si nous supposons le coefficient de $dx\,dy$ ou $\beta = 0$, & le coefficient de dt^2 ou $\alpha = F':(Z)$; nous aurons $d^2Z = dt^2 F':(Z)$ qui étant multipliée par $2dZ$, & ensuite intégrée, donnera $\frac{dZ^2}{dt^2} = g + 2\int dZ F':(Z) = g + 2F:(Z)$, & $\frac{dZ}{dt} = \sqrt{[g + 2F:(Z)]}$, g étant la constante arbitraire ajoutée en intégrant. Mais $\frac{dZ}{dt} = \frac{Pdx + Qdy}{dT} = \frac{P\sqrt{X} + Q\sqrt{Y}}{T}$; donc l'intégrale de l'équation $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ sera $P\sqrt{X} + Q\sqrt{Y} = T\sqrt{[g + 2F:(Z)]}$. Toute la difficulté se réduit donc à trouver pour T & Z des

valeurs qui ſatisfaſſent aux équations $\alpha=0$ & $\zeta=0$.

Si l'on fait pour ſimplifier log. $T=u$, l'équation $\zeta=0$ donnera $\frac{du}{dy}=-\frac{Q}{P}\frac{du}{dx}+\frac{2}{P}\frac{dP}{dy}$, &, à cauſe de $du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy$, $du=\frac{du}{dx}\cdot\frac{Pdx-Qdy}{P}+\frac{2}{P}\frac{dP}{dy}dy$; d'où l'on tirera (n°. 54), en nommant μ le facteur propre à rendre $Pdx-Qdy$ une différentielle exacte, & en faiſant $\mu Pdx-\mu Qdy=dS$, $u=\int\frac{2}{P}\frac{dP}{dy}dy+f:(S)$, l'intégrale $\int\frac{2}{P}\frac{dP}{dy}dy$ étant priſe comme il eſt dit dans l'article cité. Donc $T(=e^u)=e^{\int\frac{2}{P}\frac{dP}{dy}dy}\cdot e^{f:(S)}$, ou mieux $T=\phi:(S)\,e^{\int\frac{2}{P}\frac{dP}{dy}dy}$. Il ne reſte plus qu'à ſatisfaire à l'équation $\alpha=0$ que nous pouvons mettre ſous cette forme plus ſimple

$$(K)\ldots\frac{1}{P}\frac{d(P^2X:T^2)}{dx}+\frac{1}{Q}\frac{d(Q^2Y:T^2)}{dy}=2F':(Z).$$

Nous ſuppoſerons P fonction de x ſeul, & Q fonction de y ſeul, en ſorte que $Z=\int Pdx+\int Qdy$ & $T=\phi:(\int Pdx-\int Qdy)$. Cela poſé, ſi après avoir multiplié l'équation K par Pdx, on l'intégre en ne faiſant varier que x, on aura, en faiſant attention que dans cette hypothèſe $dZ=Pdx$, $\frac{P^2X}{T^2}+\int\frac{d(Q^2Y:T^2)}{dy}\cdot\frac{P}{Q}dx=2F:(Z)+\Pi:(y)$. Mais $\frac{d(Q^2Y:T^2)}{dy}=\frac{1}{T^2}\frac{d.Q^2Y}{dy}-\frac{2Q^2Y}{T^3}\frac{dT}{dy}$; donc

$$\int\frac{d(Q^2Y:T^2)}{dy}\cdot\frac{P}{Q}dx=\frac{d.Q^2Y}{Qdy}\int\frac{Pdx}{T^2}-$$

$$2QY\int\frac{dT}{dy}\,\frac{Pdx}{T^3}=\frac{1}{Q}\,\frac{d\left(Q^2Y\int\frac{Pdx}{T^2}\right)}{dy}$$; & l'équation précédente devient

$$\frac{P^2X}{T^2}+\frac{1}{Q}\,\frac{d\left(Q^2Y\int\frac{Pdx}{T^2}\right)}{dy}=2F:(Z)+\Pi:(y).$$

Je multiplie celle-ci par Qdy, & je l'intégre en ne faisant varier que y, ce qui me donne, en faisant attention que dans cette hypothèse $dZ=Qdy$,

$P^2X\int\frac{Qdy}{T^2}+Q^2Y\int\frac{Pdx}{T^2}=2\int dZF:(Z)+\Delta:$ $(y)+\Psi(x)$. Maintenant puisque T est une fonction de $\int Pdx+\int Qdy$, cette quantité est réciproquement une fonction de T qu'on peut représenter par $\sigma:(T)$, & on aura $Pdx=\frac{dT}{dx}\sigma':(T)$, $Qdy=-\frac{dT}{dy}\sigma':(T)$.

C'est pourquoi si l'on suppose $\frac{Pdx}{T^2}=\frac{dT}{dx}\Sigma':(T)$, & par conséquent $\int\frac{Pdx}{T^2}=\Sigma:(T)$; on aura $\frac{Qdy}{T^2}=$ $-\frac{dT}{dy}\Sigma':(T)$, & $\int\frac{Qdy}{T^2}=-\Sigma:(T)$. Donc $\int\frac{Pdx}{T^2}=\Gamma:(\int Pdx-\int Qdy)$ & $\int\frac{Qdy}{T^2}=-$ $\Gamma:(\int Pdx-\int Qdy)$. En substituant ces valeurs dans la derniere équation, on la changera en celle-ci: $(Q^2Y-P^2X)\Gamma:(\int Pdx-\int Qdy)=2\int dZF:(Z)$ $+\Delta:(y)+\Psi:(x)$.

Lorsque $X=a+bx+cx^2+ex^3+fx^4$, $Y=$

$a+by+cy^2+ey^3+fy^4$; on ſatisfera à l'équation précédente, en faiſant $Z=x+y$, & par conſéquent $P=1$, $Q=1$; puis $\Gamma:(x-y)=\frac{-1}{x-y}$, $2\int dZF:(Z)=b+cZ+\frac{e}{2}Z^2+\frac{f}{3}Z^3$, $\Delta:(y)=\frac{ey^2}{2}+\frac{2fy^3}{3}$, $\Psi:(x)=\frac{ex^2}{2}+\frac{2fx^3}{3}$. Mais c'eſt ſur-tout de l'équation K qui eſt infiniment plus générale que celle-là dont il faudra s'occuper, ſi l'on veut trouver des cas d'intégrabilité de l'équation $\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$ autres que ceux que l'on connoît & que nous avons indiqués dans cet article.

75. On a dû remarquer que par les méthodes dont il eſt queſtion dans ce Chapitre, on peut parvenir à ſatisfaire à une équation différentielle, ſans que l'équation qui ſatisfait ſoit compriſe dans l'intégrale complette ou générale. Or, ſans connoître l'intégrale complette d'une équation différentielle, comment s'aſſurer que la ſolution particuliere qu'on vient de trouver, en eſt une intégrale particuliere? M. Euler s'eſt occupé de cette importante queſtion dans le premier volume de ſon Calcul Intégral; la ſolution qu'il en a donnée a été étendue & perfectionnée par M. d'Alembert dans les Mémoires de l'Académie de 1769. Mais le Problême n'a été réſolu généralement que dans la premiere partie des Mémoires de 1772; M. de la Place y donne des méthodes pour trouver toutes les ſolutions particulieres d'une équation différentielle propoſée qui ne feroit pas compriſe dans l'intégrale complette.

Soit l'équation du premier ordre $dy=pdx$; ſi

$\mu = 0$ satisfait à cette équation différentielle, elle sera une solution particuliere (M. de la Place entend par-là qu'elle ne sera pas comprise dans l'intégrale complette) toutes les fois qu'elle rendra nulle la quantité $1 : \left(\frac{d^2\mu}{dx^2} + p \frac{d^2\mu}{dx\,dy} + \frac{d\mu}{dx} \cdot \frac{d\mu}{dy} \right)$, autrement elle sera une intégrale particuliere; on suppose μ fonction de x, y, & par $\frac{d\mu}{dx}$, $\frac{d\mu}{dy}$, $\frac{d^2\mu}{dx^2}$, $\frac{d^2\mu}{dx\,dy}$, on entend les différences partielles de μ du premier & du second ordre. Voilà bien la maniere de reconnoître si l'équation qui satisfait est une solution particuliere ou une intégrale particuliere; mais comment trouver toutes les solutions particulieres d'une équation différentielle du premier ordre proposée? Le Théorême suivant donne le moyen d'y parvenir. Si $\mu = 0$, μ étant toujours fonction des variables x & y, est une solution particuliere de l'équation différentielle $dy = p\,dx$; μ est un facteur commun aux deux quantités $p + \frac{d^2p}{dx\,dy} : \frac{d^2p}{dy^2}$ & $1 : \frac{dp}{dy}$; c'est-à-dire que $\mu = 0$ rendra nulle chacune de ces quantités: réciproquement tout facteur commun à ces deux quantités égalé à zero, est une solution particuliere de l'équation différentielle $dy = p\,dx$. On trouve dans le Mémoire cité les démonstrations de ces deux Théorêmes, & de Théorêmes relatifs pour les équations différentielles des ordres supérieurs. Cela n'a pas empêché M. de la Grange de s'occuper des mêmes questions; voici la solution qu'il en donne dans les Mémoires de Berlin de 1774, & qui est très-directe & très-simple.

Nous avons démontré (n°. 46) que si l'équation différentielle du premier ordre $(V) = 0$ a pour intégrale

tégrale complette l'équation $V=0$ entre y, x & la constante arbitraire a, & qu'en différentiant $V=0$, on trouve $dy=p\,dx$; nous avons, dis-je, démontré que $(V)=0$ résulte de l'élimination de a au moyen des deux équations $V=0$ & $dy=p\,dx$. Ainsi quand même a ne seroit pas constant, $V=0$ satisferoit à $(V)=0$, pourvu que par la différentiation de $V=0$, on eût également $dy=p\,dx$. Supposons maintenant qu'en faisant varier y, x & a dans $V=0$, on ait $dy=p\,dx+q\,da$, qu'on réduira à $dy=p\,dx$ en faisant $q=0$; si cette équation $q=0$ donne une ou plusieurs valeurs de a en y & x, ces valeurs étant substituées successivement dans $V=0$, on aura différentes équations entre y & x qui satisferont à l'équation différentielle $(V)=0$, sans être comprises dans l'intégrale complette $V=0$, & qui seront par conséquent autant de solutions particulieres de cette équation différentielle. On auroit pu donner à la différentielle de $V=0$, prise en faisant varier y, x & a, cette autre forme $dx=P\,dy+Q\,da$; alors si ayant fait $Q=0$, on eut trouvé une ou plusieurs valeurs de a en y & x, ces valeurs étant substituées successivement dans $V=0$, auroient aussi donné autant de solutions particulieres de l'équation différentielle $(V)=0$. M. de la Grange tire de cette remarque la regle suivante pour trouver toutes les solutions particulieres d'une équation différentielle du premier ordre dont on connoît l'intégrale complette. Différentiez cette intégrale complette en faisant varier y & a, puis x & a; tirez de ces équations les valeurs de $\frac{dy}{da}$ & $\frac{dx}{da}$; faites ces valeurs chacune $=0$; & si les équations que vous aurez de cette maniere donnent une ou plusieurs valeurs de a en y & x, vous les substituerez successivement dans l'in-

tégrale complette, & vous aurez autant de ſolutions particulieres de l'équation différentielle propoſée.

Il pourroit arriver que quelques-unes de ces équations ne renfermaſſent que a & des conſtantes de l'équation différentielle; alors les valeurs de a qu'on en tireroit étant conſtantes & déterminées, on n'auroit par la ſubſtitution de ces valeurs dans l'intégrale complette, que des intégrales particulieres de la propoſée. Il pourroit arriver auſſi que quelques-unes de ces mêmes équations ne renfermaſſent que x & y ſans l'arbitraire a; & comme dans ce cas elles ſatisferont elles-mêmes à l'équation différentielle, il ne ſera plus queſtion que de s'aſſurer ſi elles en ſont des ſolutions particulieres ou des intégrales particulieres. Pour cela on les combinera chacune avec l'intégrale complette, en chaſſant x ou y, & on verra ſi la réſultante donne a variable ou conſtant. Si elle donnoit $a = \frac{0}{0}$, ce ſeroit une marque que la valeur de $\frac{dy}{da}$ ou $\frac{dx}{da}$ en queſtion, eſt un facteur de l'intégrale complette, indépendant de la conſtante arbitraire a, & par conſéquent étranger à l'équation différentielle. Il ne s'agit plus que d'éclaircir cette théorie par des exemples.

Soit d'abord l'équation différentielle $dy = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}}$ qui a pour intégrale complette $x^2-2ay-a^2-m^2=0$; je tire de cette derniere équation $\frac{dy}{da} = -\frac{a+y}{a}$, $\frac{dx}{da} = \frac{a+y}{x}$ qui donnent également $a=-y$; & ſubſtituant cette valeur de a dans l'intégrale complette, on trouve $x^2+y^2-m^2=0$, qui eſt la ſeule ſolution particuliere de l'équation différentielle propoſée qui puiſſe avoir lieu. Je prendrai pour ſecond exemple l'équation différentielle ſépa-

rée $\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$, dans laquelle $X=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4$, $Y=A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4$, & dont l'intégrale complette eſt, comme nous l'avons démontré dans l'article précédent, $\sqrt{X}+\sqrt{Y}=(x-y)\sqrt{(a+U)}$, où a eſt la conſtante arbitraire, & $U=D(x+y)+E(x+y)^2$. En faiſant pour plus de ſimplicité $\frac{dX}{dx}=X'$, $\frac{dY}{dy}=Y'$, $\frac{dU}{dx}=\frac{dU}{dy}=U'$, je tirerai de l'intégrale complette $\frac{dy}{da}=\frac{(x-y)\sqrt{Y}}{Y'\sqrt{(a+U)}-[U'(x-y)+2(a+U)]\sqrt{Y}}$, $\frac{dx}{da}=\frac{(x-y)\sqrt{X}}{X'\sqrt{(a+U)}-[U'(x-y)+2(a+U)]\sqrt{X}}$; ainſi les ſuppoſitions de $\frac{dy}{da}=0$, $\frac{dx}{da}=0$, me donneront ces équations $x-y=0$, $Y=0$ & $X=0$ que je vais examiner ſucceſſivement. Je tire de l'intégrale complette $a=\frac{(\sqrt{X}+\sqrt{Y})^2}{(x-y)^2}-U$; & comme $x-y=0$ rend a infini, j'en conclus que cette équation eſt une intégrale particuliere de la propoſée, ce qui d'ailleurs eſt évident. Mais ni $Y=0$ ni $X=0$ ne rend a conſtant; il n'eſt donc plus queſtion que d'examiner quand elles ſont des ſolutions particulieres de la même équation différentielle. Or en faiſant $Y=0$, le dénominateur de $\frac{dy}{da}$ devient $Y'\sqrt{(a+U)}$ qui ſera nul lorſque $Y'=0$; de même la ſuppoſition de $X=0$, réduit le dénominateur de $\frac{dx}{da}$ à $X'\sqrt{(a+U)}$ qui ſera nul lorſque $X'=0$. Donc les équations $Y=0$ & $X=0$ ne ſeront des ſolutions particulieres de la propoſée que lorſqu'on n'aura pas en même-tems

$Y'=0$ & $X'=0$; &, par conféquent les folutions particulieres de la propofée feront toutes comprifes fous cette forme $x=u$ ou $y=u$, en prenant pour u une des racines fimples quelconque de l'équation $A+Bu+Cu^2+Du^3+Eu^4=0$. Si on propofe $\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0$, dont l'intégrale complette eft $\sqrt{X}-\sqrt{Y}=(x-y)\sqrt{(a+U)}$; on aura auffi $x-y=0$. Mais comme cette équation rend $a\left(=\frac{(\sqrt{X}-\sqrt{Y})^2}{(x-y)^2}-U\right)=\frac{0}{0}$; il s'enfuit qu'elle doit être rejettée comme étrangere à l'équation différentielle propofée. Du refte, on trouvera dans ce cas-ci les mêmes folutions particulieres que dans le cas précédent.

Soit toujours l'équation $V=0$ entre y, x & a qui étant différentiée en faifant tout varier, donne $dy=pdx+qda$; je fuppofe qu'ayant différentié p, en faifant varier y, x & a, & qu'ayant mis enfuite pour dy fa valeur tirée de l'équation précédente, on ait $dp=p'dx+q'da$; qu'ayant différentié p' de la même maniere, on ait $dp'=p''dx+q''da$; qu'ayant différentié p'' encore de la même maniere, on ait $dp''=p'''dx+q'''da$, & ainfi de fuite. Cela pofé, de même que j'ai formé l'équation différentielle du premier ordre $(V)=0$, en chaffant a au moyen des deux équations $V=0$ & $\frac{dy}{dx}=p$; je formerai l'équation du fecond ordre $(V')=0$ des trois équations $V=0$, $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{d^2y}{dx^2}=p'$ (dx eft fuppofé conftant) de maniere que a difparoiffe; je formerai l'équation du troifiéme ordre $(V'')=0$ des quatre équations $V=0$, $\frac{dy}{dx}=p$,

$\frac{d^2y}{dx^2}=p'$, $\frac{d^3y}{dx^3}=p''$, de maniere que a diſparoiſſe ; & ainſi de celles des ordres ſupérieurs. Or il eſt clair que dans l'hypothèſe de a variable, $V=0$ ne peut ſatisfaire à $(V)=0$ que l'on n'ait $q=0$; de même $V=0$ ne pourra, dans la même hypothèſe, ſatisfaire à $(V')=0$, que l'on n'ait en même-temps $q=0$ & $q'=0$, ſans quoi les équations $dy=pdx+qda$ & $dp=p'dx+q'da$ ne ſe réduiroient pas à $dy=pdx$ & $dp=p'dx$; cette même équation $V=0$ ne pourra ſatisfaire à $(V'')=0$, toujours dans l'hypothèſe de a variable, que l'on n'ait en même-temps $q=0$, $q'=0$ & $q''=0$, ſans quoi les équations $dy=pdx+qda$, $dp=p'dx+q'da$, $dp'=p''dx+q''da$ ne pourroient ſe réduire à $dy=pdx$, $dp=p'dx$, $dp'=p''dx$; &c. Ces quantités q, q', q'', &c, ne ſont autre choſe que $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dxda}$, $\frac{d^3y}{dx^2da}$, &c ; en remarquant de plus qu'au lieu de dégager dy dans la différentielle de $V=0$, on auroit pu dégager dx, on verra aiſément que pour que dans l'hypothèſe de a variable $V=0$ ſatisfaſſe à cette ſuite d'équations $(V)=0$, $(V')=0$, $(V'')=0$, &c, à l'infini, il faut qu'on ait à l'infini $\frac{dy}{da}=0$, $\frac{d^2y}{dxda}=0$, $\frac{d^3y}{dx^2da}=0$, &c, ou $\frac{dx}{da}=0$, $\frac{d^2x}{dyda}=0$, $\frac{d^3x}{dy^2da}=0$, &c. Mais ſi en regardant y comme une fonction de x & a, donnée par $V=0$, on a à l'infini $\frac{dy}{da}=0$, $\frac{d^2y}{dxda}=0$, &c, il faut néceſſairement que la valeur de $\frac{dy}{da}$ ne contienne pas x,

alors on ne pourra tirer de $\frac{dy}{da}=0$ que a égal à une fonction de constantes déterminées; de même si en regardant x comme une fonction de y & a, donnée par $V=0$, on a à l'infini $\frac{dx}{da}=0$, $\frac{d^2x}{dy\,da}=0$, &c, il est nécessaire que la valeur de $\frac{dx}{da}$ ne contienne pas y, & $\frac{dx}{da}=0$ donnera a égal à une fonction de constantes déterminées. C'est de cette remarque que M. de la Grange tire la solution de ce Problême : *Trouver toutes les solutions particulieres de l'équation différentielle du premier ordre* $(V)=0$ *sans connoître son intégrale complette* $V=0$.

On suppose pour plus de simplicité que l'équation $(V)=0$ ne renferme pas de quantité transcendante, & qu'on l'a préparée de maniere qu'elle est absolument délivrée de fractions & de radicaux. Alors si l'on fait $d(V)=Ad\frac{dy}{dx}+Bdy+Cdx$. A, B, C seront des fonctions rationnelles entieres de y, x & $\frac{dy}{dx}$. Maintenant puisque l'équation $(V)=0$ est indépendante de a, on doit avoir $\frac{d(V)}{da}=0$, soit qu'on regarde y comme fonction de x & a, ou x comme fonction de y & a, l'une ou l'autre donnée par l'équation $V=0$. On aura donc $A\frac{d^2y}{dx\,da}+B\frac{dy}{da}=0$. Mais pour trouver les solutions particulieres de l'équation différentielle $(V)=0$, il faut faire $\frac{dy}{da}=0$; de plus, B étant sans dénominateur

ne peut devenir infini par cette ſuppoſition; ainſi l'équation précédente ſe réduit néceſſairement à celle-ci : $A \frac{d^2y}{dxda} = 0$, qui, lorſque $\frac{d^2y}{dxda}$ n'eſt pas nul en même-tems que $\frac{dy}{da}$, donne $A = 0$. Lorſque $\frac{dy}{da}$ & $\frac{d^2y}{dxda}$ ſeront nuls en même-tems, l'équation $A \frac{d^2y}{dxda} + B \frac{dy}{da} = 0$ aura lieu d'elle-même. Dans ce cas on la différentiera en faiſant varier y & x, & on aura $A \frac{d^3y}{dx^2da} + \left(\frac{dA}{dx} + B\right) \frac{d^2y}{dxda} + \frac{dB}{dx} \frac{dy}{da} = 0$, qui, à cauſe que les deux quantités $\frac{dy}{da}$ & $\frac{d^2y}{dxda}$ ſont nulles par l'hypothèſe, ſe réduit à $A \frac{d^3y}{dx^2da} = 0$, laquelle donne $A = 0$, lorſque $\frac{d^3y}{dx^2da}$ n'eſt pas nul en même-tems que $\frac{dy}{da}$ & $\frac{d^2y}{dxda}$. Lorſque ces trois quantités ſeront nulles en même-temps, il faudra différentier $A \frac{d^3y}{dx^2da} + \left(\frac{dA}{dx} + B\right) \frac{d^2y}{dxda} + \frac{dB}{dx} \frac{dy}{da} = 0$, en faiſant varier y & x; & après avoir effacé les termes qui ſeront multipliés par $\frac{dy}{da}$, $\frac{d^2y}{dxda}$, $\frac{d^3y}{dx^2da}$, on aura $A \frac{d^4y}{dx^3da} = 0$, qui donnera encore $A = 0$, ſi $\frac{d^4y}{dx^3da}$ n'eſt pas nul en même-temps que $\frac{dy}{da}$,

$\frac{d^2y}{dxda}$, $\frac{d^3y}{dx^2da}$. Donc on aura néceſſairement l'équation $A=0$, ſi toutes ces quantités $\frac{dy}{da}$, $\frac{d^2y}{dxda}$, &c, à l'infini ne ſont pas nulles. Or nous avons démontré plus haut que ſi elles étoient nulles à l'infini, $\frac{dy}{da}$ ne pourroit donner que a égal à une fonction de conſtantes déterminées, & que par conſéquent la ſubſtitution faite de a dans $V=0$ donneroit une intégrale particuliere & non une ſolution particuliere; ainſi pour que ce ſoit une ſolution particuliere, il faut néceſſairement que $A=0$. Je reprens l'équation $d(V)=Ad\frac{dy}{dx}+Bdy+Cdx=0$, qui, à cauſe de $A=0$, ſe réduit à $Bdy+Cdx=0$; celle-ci devra s'accorder avec $A=0$, lorſqu'on aura chaſſé $\frac{dy}{dx}$ au moyen de l'équation $V=0$. Mais $\frac{d^2y}{dx^2}=$

$$-\frac{B\frac{dy}{dx}+C}{A}$$

; donc dans le cas des ſolutions particulieres tirées de $\frac{dy}{da}=0$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ deviendra $\frac{0}{0}$: on démontreroit de la même maniere que dans le cas des ſolutions particulieres tirées de $\frac{dx}{da}=0$, $\frac{d^2x}{dy^2}$ deviendroit $\frac{0}{0}$. Je m'empreſſe d'éclaircir tout cela par des exemples.

Soit d'abord l'équation $xdx+ydy=dy\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}$, d'où je tire $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}-y}$ &

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2 - m^2 - xy\frac{dy}{dx} + (x\frac{dy}{dx} - y)\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}}{(\sqrt{(x^2+y^2-m^2)} - y)^2\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}};$$

cette quantité devant être $\frac{0}{0}$, il en résulte deux équations (a)..... $y^2 - m^2 - xy\frac{dy}{dx} + \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)$ $\sqrt{(x^2+y^2-m^2)} = 0$, (b).........$(\sqrt{(x^2+y^2-m^2)} - y)^2\sqrt{(x^2+y^2-m^2)} = 0$. La seconde donne $\sqrt{(x^2+y^2-m^2)} - y = 0$, ou $\sqrt{(x^2+y^2-m^2)} = 0$. Si l'on fait $\sqrt{(x^2+y^2-m^2)} - y = 0$, l'équation a devient $-m^2 = 0$, ce qui n'apprend rien absolument. Mais si l'on fait $\sqrt{(x^2+y^2-m^2)} = 0$, l'équation a devient $y^2 - m^2 - xy\frac{dy}{dx} = 0$; & parce que dans la même supposition $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, elle donne pour solution particuliere de la proposée $y^2 + x^2 - m^2 = 0$. Je puis aussi tirer de la proposée $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{(x^2+y^2-m^2)} - y}{x}$ & $\frac{d^2x}{dy^2} =$

$$\frac{xy - (y^2 - m^2)\frac{dx}{dy} + (y\frac{dx}{dy} - x)\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}}{x^2\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}};$$

cette quantité devant être $\frac{0}{0}$, il en résulte les deux équations (c).......... $xy - (y^2 - m^2)\frac{dx}{dy} + (y\frac{dx}{dy} - x)\sqrt{(x^2+y^2-m^2)} = 0$, (d)...... $x^2\sqrt{(x^2+y^2-m^2)} = 0$. La seconde donne $x = 0$ ou $\sqrt{(x^2+y^2-m^2)} = 0$. La supposition de $x = 0$, réduit l'équation c à celle-ci, $(y\sqrt{(y^2-m^2)} - y^2 + m^2)\frac{dx}{dy} = 0$; & parce que dans la même

hypothèse $\frac{dx}{dy}$ devient $\frac{1}{0}$, il eſt clair que $x=0$ ne peut être une ſolution particuliere de la propoſée. Mais ſi je fais $\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}=0$, l'équation c devient $xy-(y^2-m^2)\frac{dx}{dy}=0$, & comme alors $\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x}$, elle ſe réduit à $x^2+y^2-m^2=0$. Donc $x^2+y^2-m^2=0$ eſt la ſeule ſolution particuliere de la propoſée qui puiſſe avoir lieu, ce que nous ſavions déja.

Cette autre équation $\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$ étant propoſée, on en tire $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{X}}$, & $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{XY'\frac{dy}{dx}-YX'}{2X\sqrt{XY}}$. Cette quantité devant être $\frac{0}{0}$, il en réſulte les deux équations $XY'\frac{dy}{dx}-YX'=0$, $X\sqrt{XY}=0$. La ſeconde donne $X=0$ ou $Y=0$. Si l'on fait $X=0$, l'équation $XY'\frac{dy}{dx}-YX'=0$ devient $YX'=0$, qui, ſi X' n'eſt pas nul en même-tems que X, donne $Y=0$; donc $X=0$ eſt une ſolution particuliere de la propoſée, lorſqu'on n'a pas en même-tems $X'=0$. On trouveroit de la même maniere que $Y=0$ eſt une ſolution particuliere de la propoſée lorſqu'on n'a pas en même-tems $Y'=0$.

Dans l'équation $Ad\frac{dy}{dx}+Bdy+Cdx=0$, ſi $Bdy+Cdx$ eſt nul de lui-même, on aura $Ad\frac{dy}{dx}=0$, & pour que $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{0}{0}$, il ſuffira que $A=0$. On éli-

minera $\frac{dy}{dx}$ au moyen de $A=0$ & de $(V)=0$; & l'équation résultante entre x & y sera une solution particuliere de $(V)=0$. Dans ce cas-ci l'intégrale complette est facile à trouver; car alors A n'étant pas zéro, on a $d\frac{dy}{dx}=0$ & $\frac{dy}{dx}=a$; cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ étant substituée dans $(V)=0$, on a une équation entre y, x & la constante arbitraire a qui est l'intégrale complette de $(V)=0$.

On tire de $Bdy+Cdx=0$, $C=-B\frac{dy}{dx}=-Bp$, en faisant $\frac{dy}{dx}=p$; & l'équation $Ad\frac{dy}{dx}+Bdy+Cdx=0$ devient $Adp+B(dy-pdx)=0$; d'où l'on tire $dy-pdx+\frac{A}{B}dp=0$, &, en intégrant, $y-px+\int xdp+\int\frac{A}{B}dp=0$, ou $y-px+\int\left(x+\frac{A}{B}\right)dp=0$. Cette équation ne peut être vraie à moins que $x+\frac{A}{B}$ ne soit fonction de p; faisons donc $x+\frac{A}{B}=f:(p)$, & nous aurons $y-px+f:(p)=0$, ou $y-x\frac{dy}{dx}+f:\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$, équation différentielle qui représente toutes celles du premier ordre qui s'intégrent par la différentiation. En effet, en la différentiant elle devient $\left(f':\left(\frac{dy}{dx}\right)-x\right)d\frac{dy}{dx}=0$; d'où l'on tire $d\frac{dy}{dx}=0$ ou $f':\left(\frac{dy}{dx}\right)-x=0$. La premiere de ces équations donne

$\frac{dy}{dx} = a$; & en ſubſtituant dans $y - x\frac{dy}{dx} + f : \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, on a pour l'intégrale complette de cette équation différentielle $y - ax + f : (a) = 0$. L'intégrale complette que nous venons de trouver appartient à la ligne droite; tandis que la ſolution particuliere qu'on obtiendra en éliminant $\frac{dy}{dx}$ au moyen de la propoſée $y - x\frac{dy}{dx} + f : \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, & de $f' : \left(\frac{dy}{dx}\right) - x = 0$ appartiendra à une ligne courbe. M. Clairaut eſt le premier qui ait remarqué ce genre d'équations qui s'intégrent par la différentiation (Mémoires de l'Académie de 1734) & dont la propriété eſt d'appartenir en même-tems à une ligne droite & à une ligne courbe; mais perſonne avant M. de la Grange n'avoit démontré que cette eſpece de paradoxe tenoit à la théorie des ſolutions particulieres des équations différentielles.

Si l'équation du ſecond ordre $(V) = 0$ a pour intégrale finie complette $V = 0$, V ſera une fonction de x, y & de deux conſtantes arbitraires a & b. On peut ſuppoſer que b eſt fonction de a, & regarder V comme fonction de x, y & a; alors on verra aiſément qu'il ſuit de ce qui précéde, que même dans le cas de a variable, $V = 0$ ſatisfera à $(V) = 0$, pourvu que l'on ait $\frac{dy}{da} + \frac{dy}{db}\frac{db}{da} = 0$, & $\frac{d^2y}{dxda} + \frac{d^2y}{dxdb}\frac{db}{da} = 0$, ou $\frac{dx}{da} + \frac{dx}{db}\frac{db}{da} = 0$ &

$\frac{d^2x}{dyda}+\frac{d^2x}{dydb}\frac{db}{da}=0$. Maintenant ſi on différentie $V=0$, en faiſant tout varier, on aura $dy=pdx+\frac{dy}{da}da+\frac{dy}{db}db$, qui ſe réduit à $dy=pdx$, à cauſe de $\frac{dy}{da}da+\frac{dy}{db}db=0$; ou $dx=Pdy+\frac{dx}{da}da+\frac{dx}{db}db$, qui ſe réduit à $dx=Pdy$, à cauſe de $\frac{dx}{da}da+\frac{dx}{db}db=0$. Ainſi on aura ces quatre équations $V=0$, $\frac{dy}{dx}-p=0$, $\frac{dy}{da}+\frac{dy}{db}\frac{db}{da}=0$ & $\frac{d^2y}{dxda}+\frac{d^2y}{dxdb}\frac{db}{da}=0$, ou ces quatre autres $V=0$, $\frac{dx}{dy}-P=0$, $\frac{dx}{da}+\frac{dx}{db}\frac{db}{da}=0$ & $\frac{d^2x}{dyda}+\frac{d^2x}{dydb}\frac{db}{da}=0$; au moyen deſquelles ſi on élimine a, b & $\frac{db}{da}$, on parviendra à une équation différentielle du premier ordre, qui ſera une ſolution particuliere de la propoſée.

Je prendrai pour exemple l'équation du ſecond ordre $y-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\frac{d^2y^2}{dx^4}$, dont l'intégrale finie complette eſt $y=\frac{ax^2}{2}+bx+a^2+b^2$, a & b étant les deux conſtantes arbitraires ajoutées en intégrant. Je tire de cette intégrale $\frac{dy}{dx}=ax+b$, $\frac{dy}{da}=\frac{x^2}{2}+2a$, $\frac{dy}{db}=$

$x+2b$, $\frac{d^2y}{dxda}=x$, $\frac{d^2y}{dxdb}=1$; & ſubſtituant ces valeurs dans les quatre premieres équations que nous venons de trouver, il me vient celles-ci, $y=\frac{ax^2}{2}+bx+a^2+b^2$, $\frac{dy}{dx}=ax+b$, $\frac{x^2}{2}+2a+(x+2b)\frac{db}{da}=0$, $x+\frac{db}{da}=0$, qui donnent, en éliminant a, b & $\frac{db}{da}$, l'équation du premier ordre $y=\frac{-x^4+(8x^3+16x)\frac{dy}{dx}+\frac{16dy^2}{dx^2}}{16(1+x^2)}$ qui eſt une ſolution particuliere de la propoſée. En intégrant cette équation différentielle du premier ordre, j'aurai une équation finie qui ſera une ſolution particuliere finie de la propoſée ; voici comme je la trouve. De l'équation différentielle du premier ordre en queſtion, je tire $\frac{16dy^2}{dx^2}+(8x^3+16x)\frac{dy}{dx}=x^4+16y(1+x)^2$, & par conſéquent $\frac{4dy}{dx}+x^3+2x=\sqrt{(1+x^2)}$. $\sqrt{(16y+4x^2+x^4)}$; j'ai donc $\frac{8dy+4xdx+2x^3dx}{\sqrt{(16y+4x^2+x^4)}}=2dx\sqrt{(1+x^2)}$, dont l'intégrale complette eſt $\sqrt{(16y+4x^2+x^4)}=x\sqrt{(1+x^2)}-\log.(\sqrt{(1+x^2)}-x)+a1$. Il eſt à remarquer que cette ſolution particuliere finie de la propoſée eſt tranſcendante, tandis que l'intégrale complette finie eſt algébrique.

La ſolution particuliere aux premieres différences de la propoſée admet elle-même, outre cette intégrale complette, une ſolution particuliere qu'on trou-

vera en faisant $\frac{dy}{da1} - \frac{\sqrt{(16y+4x^2+x^4)}}{8} = 0$; en effet, si l'on combine cette derniere équation qui ne contient pas $a1$ avec l'intégrale complette, on trouvera $a1$ égal à une fonction de x, ce qui est la condition requise. Mais il ne s'ensuit pas que $16y + 4x^2 + x^4 = 0$ soit une solution particuliere de la proposée, car pour cela il faudroit que cette équation rendît nul aussi $\frac{d^2y}{dxda1} = \frac{\frac{8dy}{dx} + 4x + 2x^3}{8\sqrt{(16y+4x^2+x^4)}}$; or en mettant dans le second membre pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur $-\frac{x^3}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{(1+x^2)}.\sqrt{(16y+4x^2+x^4)}$; on trouve $\frac{d^2y}{dxda1} = \frac{\sqrt{(1+x^2)}}{4}$, qui ne devient pas nul par la supposition de $16y + 4x^2 + x^4 = 0$, &c.

Supposons qu'au moyen de $V=0$ & de $\frac{dy}{dx} - p = 0$, on ait éliminé b pour avoir $V'1 = 0$ qui est une des intégrales premieres complettes de la proposée; supposons aussi que cette équation différentielle du premier ordre étant différentiée, donne $dV'1 = Ad\frac{dy}{dx} + Bdy + Cdx + Eda$. On aura $d\frac{dy}{dx} = -\frac{Bdy + Cdx + Eda}{A}$, d'où l'on tire, en regardant y comme une fonction de x, a & b, donnée par $V=0$, $\frac{d^2y}{dxda} = -\frac{B}{A}\frac{dy}{da} - \frac{E}{A}$, $\frac{d^2y}{dxdb} = -\frac{B}{A}\frac{dy}{db}$;

ſubſtituant ces valeurs dans $\frac{d^2y}{dxda} + \frac{d^2y}{dxdb} \cdot \frac{db}{da} = 0$, on aura l'équation $\frac{B}{A}\left(\frac{dy}{da} + \frac{dy}{db}\frac{db}{da}\right) + \frac{E}{A} = 0$, qui ſe réduit à $\frac{E}{A} = 0$, car on doit auſſi avoir $\frac{dy}{da} + \frac{dy}{db}\frac{db}{da} = 0$. Or ſi dans $V'1 = 0$, on fait varier uniquement $\frac{dy}{dx}$ & a, en regardant y & x comme conſtans, on aura $Ad\frac{dy}{dx} + Eda = 0$, d'où l'on tirera $\frac{E}{A} = -\frac{d\frac{dy}{dx}}{da} = -\frac{d^2y}{dxda}$. Ainſi l'équation de condition ſe réduira à $\frac{d^2y}{dxda} = 0$, qui combinée avec $V'1 = 0$, donnera par l'élimination de a la même ſolution particuliere de la propoſée, que par les quatre équations dont nous avons fait uſage précédemment.

Si au lieu d'éliminer b, on eut éliminé a au moyen de $V = 0$ & de $\frac{dy}{dx} - p = 0$, on auroit trouvé $V'2 = 0$ qui eſt l'autre intégrale premiere complette de la propoſée; puis on ſeroit parvenu à une équation $\frac{d^2y}{dxdb} = 0$, qui, combinée avec $V'2 = 0$, auroit donné par l'élimination de b encore le même réſultat. Il ſuit de-là que ſi on ne connoît pas l'intégrale finie complette de la propoſée, mais ſeulement une des deux intégrales complettes aux premieres différences, on pourra également trouver toutes les ſolutions

solutions particulieres. Cette proposition peut se démontrer directement; car si $V'1=0$, par exemple, satisfait à $(V)=0$, quelle que soit la constante arbitraire a, il s'ensuit que $(V)=0$ vient de l'élimination de a au moyen des équations $V'1=0$, & $d\frac{dy}{dx}=p'dx$, dont la seconde est déduite de $V'1=0$ par la différentiation. Or il est clair que a étant variable, le résultat seroit le même, si, en supposant $d\frac{dy}{dx}=p'dx+q'da$, on avoit q' ou $\frac{d^2y}{dx\,da}=0$.

Pour confirmer cela par un exemple, reprenons l'équation du second ordre $y-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\frac{d^2y^2}{dx^4}$, dont nous trouverons les deux intégrales premieres en éliminant successivement a & b au moyen de l'intégrale complette $y=\frac{ax^2}{2}+bx+a^2+b^2$ & de $\frac{dy}{dx}=ax+b$. L'élimination de b donne $y=-\frac{ax^2}{2}+x\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}-ax\right)^2+a^2$; d'où l'on tire, en ne faisant varier que $\frac{dy}{dx}$ & a, $-\frac{x^2}{2}da+xd\frac{dy}{dx}+2\left(\frac{dy}{dx}-ax\right)\left(d\frac{dy}{dx}-xda\right)+2ada=0$, & par conséquent $\frac{d^2y}{dx\,da}=\frac{2x\left(\frac{dy}{dx}-ax\right)+\frac{x^2}{2}-2a}{2\left(\frac{dy}{dx}-ax\right)+x}$.

En supposant cette quantité $=0$, on aura l'équation $2x\frac{dy}{dx}-2ax^2+\frac{x^4}{2}-2a=0$, qui donnera $a=\frac{x\frac{dy}{dx}+\frac{x^3}{4}}{1+x^2}$; & en substituant pour a sa valeur dans l'intégrale premiere dont on est parti, on trouvera $y=\frac{-x^4+(8x^3+16x)\frac{dy}{dx}+16\frac{dy^2}{dx^2}}{16(1+x^2)}$, qui est la même solution particuliere qu'on a déja trouvée. L'élimination de a donne pour intégrale premiere $y=\frac{x}{2}\frac{dy}{dx}+\frac{bx}{2}+\left(\frac{\frac{dy}{dx}-b}{x}\right)^2+b^2$; laquelle on différentiera, en ne faisant varier que $\frac{dy}{dx}$ & b, pour avoir $\frac{d^2y}{dx\,db}=\frac{\frac{2}{x^2}\left(\frac{dy}{dx}-b\right)+\frac{x}{2}+2b}{\frac{x}{2}+\frac{2}{x^2}\left(\frac{dy}{dx}-b\right)}=0$, & par conséquent $b=\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{x^3}{4}}{x^2+1}$. En mettant cette valeur de b dans l'intégrale premiere dont il est question, on trouvera encore la même solution particuliere; & les deux intégrales premieres de la proposée, quoique très-différentes, nous auront conduit au même résultat.

Tout cela est analogue à ce que nous avons dit pour le premier ordre; & sans autre explication on doit voir qu'ayant formé comme alors cette suite d'équations $(V')=0$, $(V'')=0$, &c, les solutions par-

ticulieres de $(V) = 0$ ne satisferont point à $(V') = 0$, à moins que l'on n'ait $\frac{d^2y}{dx\,da} = 0$, & $\frac{d^3y}{dx^2da} = 0$; que ces mêmes solutions ne satisferont point à $(V'') = 0$, à moins que l'on n'ait $\frac{d^2y}{dx\,da} = 0$, $\frac{d^3y}{dx^2da} = 0$, $\frac{d^4y}{dx^3da} = 0$; &c; dans tous ces calculs on regardera b comme fonction de a, & par conséquent y comme fonction de x & a. Si on a à l'infini $\frac{d^2y}{dx\,da} = 0$, $\frac{d^3y}{dx\cdot da} = 0$, &c; $\frac{d^2y}{dx\,da} = 0$ ne donnera pas une solution particuliere, mais une intégrale particuliere, d'où l'on tirera la regle suivante pour trouver les solutions particulieres d'une équation différentielle du second ordre proposée sans connoître aucune de ses intégrales complettes. Il faudra différentier la proposée, & en tirer $\frac{d^3y}{dx^3}$ qu'on fera $= \frac{0}{0}$; on aura de cette maniere deux équations, au moyen de chacune desquelles & de la proposée, si on élimine $\frac{d^2y}{dx^2}$, il viendra deux autres équations entre x, y & $\frac{dy}{dx}$ qui se réduiront à une seule lorsque la proposée sera susceptible d'une solution particuliere; cette équation sera la solution particuliere demandée.

Soit toujours l'équation du second ordre $y - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \frac{d^2y^2}{dx^4}$, de laquelle on tire par la différentiation $\big(2\,(x^2 + 1)$

$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{2}\Big)\frac{d^3y}{dx^3} = 0$. A cauſe que $\frac{d^3y}{dx^3}$ doit être $\frac{0}{0}$, on a l'équation $2(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{2} = 0$, qui donne $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4x\frac{dy}{dx} + x^2}{4(x^2+1)}$. Cette valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ étant ſubſtituée dans la propoſée, on trouve toujours la même ſolution particuliere, ſavoir $y = \frac{-x^4 + (8x^3 + 16x)\frac{dy}{dx} + 16\frac{dy^2}{dx^2}}{16(1+x^2)}$.

Si la propoſée $(V) = 0$ étoit telle qu'on eût $d(V) = A'd\frac{d^2y}{dx^2}$, alors $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{0}{0}$ donneroit $A' = 0$; & on trouveroit la ſolution particuliere en éliminant $\frac{d^2y}{dx^2}$ au moyen de $A' = 0$ & de $(V) = 0$. Dans ce cas on peut trouver facilement l'intégrale finie complette de $(V) = 0$. En effet, à cauſe de $A'd\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, ſi A' n'eſt pas $= 0$, on doit avoir $d\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, d'où l'on tirera $y = \frac{ax^2}{2} + bx + c$. Mais la propoſée n'étant que du ſecond ordre, ſon intégrale complette finie ne doit renfermer que deux conſtantes arbitraires; il faudra donc ſubſtituer dans la propoſée pour y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ leurs valeurs tirées de ſon intégrale finie

complette, & il viendra nécessairement une équation entre les trois arbitraires a, b, c, sans x ni y, qui servira à déterminer l'une de ces arbitraires par les deux autres. Maintenant pour trouver la forme de ces sortes d'équations, nous supposerons $c = f:(a, b)$; &, à cause de $a = \frac{d^2y}{dx^2}$, $b = \frac{dy}{dx} - ax = \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}$, nous aurons $c = f:\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)$; & par conséquent $y = x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + f:\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)$. Toute équation réductible à cette forme aura la propriété de pouvoir être intégrée par une nouvelle différentiation ; on trouvera de cette maniere que l'équation précédente a pour intégrale finie complette $y = \frac{ax^2}{2} + bx + f:(a, b)$ qui représente toujours une parabole ; & qu'elle admet une solution particuliere qu'on trouvera en éliminant $\frac{d^2y}{dx^2}$ au moyen de $-\frac{x^2}{2} + \frac{df:\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\frac{d^3y}{dx^3}} = 0$, solution particuliere qui pourra représenter différentes courbes.

Nous avons déduit bien simplement la maniere de trouver les solutions particulieres des équations différentielles du second ordre de celle dont nous avions fait usage pour le premier ordre ; il ne seroit pas plus difficile d'appliquer cette théorie aux équations différentielles des ordres supérieurs ; c'est pourquoi nous

terminerons-là ce Chapitre de la séparation des variables dans les équations différentielles, pour pouvoir traiter avec quelqu'étendue de l'autre méthode de les intégrer, ce que nous nous proposons de faire dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE IX.

De la maniere d'intégrer les équations différentielles en les multipliant par des facteurs.

76. JE commencerai par les équations du premier ordre entre deux variables qu'on peut toutes représenter par $\alpha dx + \beta dy = 0$, α & β étant des fonctions quelconques de ces variables y, x & de constantes; or j'ai démontré, page 290, que si on désignoit par μ un des facteurs propres à rendre $\alpha dx + \beta dy$ une différentielle exacte, $z = \mu$ feroit une intégrale particuliere de l'équation aux différences partielles (A)........ $\alpha \frac{dz}{dy} - \beta \frac{dz}{dx} + \left(\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx}\right) z = 0$. Je suppose qu'on ait donné le facteur μ, & qu'on demande quels doivent être α & β pour que $\mu\alpha dx + \mu\beta dy$ soit une différentielle exacte. Soit, par exemple $\mu = \frac{1}{\alpha x + \beta y}$; à cause de $\frac{d\mu}{dy} = -\left(\frac{d\alpha}{dy} x + \frac{d\beta}{dy} y + \beta\right) : (\alpha x + \beta y)^2$, $\frac{d\mu}{dx} = -\left(\alpha +\right.$

$\frac{d\alpha}{dx}x + \frac{d\beta}{dx}y\Big) : (\alpha x + \beta y)^2$, l'équation A devient $\alpha\left(\frac{d\beta}{dy}y + \frac{d\beta}{dx}x\right) = \beta\left(\frac{d\alpha}{dy}y + \frac{d\alpha}{dx}x\right)$, qui eſt identique ſi α & β ſont des fonctions homogènes de même dimenſion n; car on a dans ce cas $\frac{d\beta}{dy}y + \frac{d\beta}{dx}x = n\beta$ & $\frac{d\alpha}{dy}y + \frac{d\alpha}{dx}x = n\alpha$, ce qui réduit l'équation précédente à celle-ci $n\alpha\beta = n\alpha\beta$ qui eſt évidemment identique. Je mets la même équation ſous la forme $y\frac{\alpha\frac{d\beta}{dy} - \beta\frac{d\alpha}{dy}}{\alpha^2} + x\frac{\alpha\frac{d\beta}{dx} - \beta\frac{d\alpha}{dx}}{\alpha^2} = 0$;

&, en faiſant $\frac{\beta}{\alpha} = m$, je la change en celle-ci $y\frac{dm}{dy} + x\frac{dm}{dx} = 0$, d'où je tire $\frac{dm}{dy} = -\frac{x}{y}\frac{dm}{dx}$. Mais $dm = \frac{dm}{dx}dx + \frac{dm}{dy}dy$; donc $dm = \frac{dm}{dx}$. $\frac{ydx - xdy}{y} = \frac{dm}{dx}y\,d\left(\frac{x}{y}\right)$. Il ſuit de-là que m doit être une fonction quelconque de $\frac{x}{y}$, ce qu'on exprime en écrivant $m = f : \left(\frac{x}{y}\right)$; & que par conſéquent $\frac{dx + dyf : \left(\frac{x}{y}\right)}{x + yf : \left(\frac{x}{y}\right)}$ ou $\frac{\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}f : \left(\frac{x}{y}\right)}{1 + f : \left(\frac{x}{y}\right)}$, ou

même encore $\frac{\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}f:\left(\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dy}{y}\right)}{1+f:\left(\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dy}{y}\right)}$, est une différentielle exacte. Or T & U étant deux fonctions l'une de t, l'autre de u, je puis faire $\frac{dt}{T}=\frac{dx}{x}$ & $\frac{du}{U}=\frac{dy}{y}$; j'aurai donc $\frac{dt+\frac{T}{U}duf:\left(\int\frac{dt}{T}-\int\frac{du}{U}\right)}{T+Tf:\left(\int\frac{dT}{T}-\int\frac{du}{U}\right)}$, qui sera aussi une différentielle exacte. Donc M & N étant deux fonctions de t & u, pour que $Mdt+Ndu$ devienne une différentielle exacte étant divisé par $MT+NU$, il faut que $\frac{N}{M}=\frac{T}{U}:f\left(\int\frac{dt}{T}-\int\frac{du}{U}\right)$, ou, ce qui revient au même, que $M=\frac{P}{T}F:\left(\int\frac{dt}{T}-\int\frac{du}{U}\right)$ & $N=\frac{P}{U}:\phi\left(\int\frac{dt}{T}-\int\frac{du}{U}\right)$; P étant une fonction quelconque de t, u; & les caractéristiques F, ϕ désignant deux fonctions différentes de la même quantité $\int\frac{dt}{T}-\int\frac{du}{U}$.

On suppose μ fonction de x seul & de constantes, & on demande quels doivent être α & β pour que $\alpha dx+\beta dy$ devienne une différentielle exacte étant multiplié par μ. On a dans ce cas $\frac{d\mu}{dy}=0$, & l'équa-

tion A devient $\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\zeta}{dx} = \frac{\zeta}{\mu} \frac{d\mu}{dx}$. On pourra prendre pour ζ telle fonction de y, x & de constantes qu'on voudra, pourvu que $a = \int \left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{\zeta}{\mu} \frac{d\mu}{dx} \right) dy + f:(x)$. Si $\zeta = F:(x)$, α sera nécessairement de cette forme $yf:(x) + \phi:(x)$; & on pourra rendre exacte la différentielle $dyF:(x) + ydxf:(x) + dx\phi:(x)$, en la multipliant par une fonction de x seul & de constantes, ce que nous savions déja.

L'équation $ydy + Mydx + Ndx = 0$, où M & N sont des fonctions de x seul & de constantes, ne paroît pas être beaucoup plus compliquée que l'équation linéaire dont il vient d'être question; cependant on ne connoît point encore de moyen de l'intégrer généralement. Dans cet exemple, $\zeta = y$, $\alpha = My + N$; d'où l'on tire $\frac{d\zeta}{dx} = 0$ & $\frac{d\alpha}{dy} = M$. Je supposerai premiérement μ de cette forme $\frac{1}{(y+X)^n}$; alors $\frac{d\mu}{dy} = \frac{-n}{(y+X)^{n+1}}$, $\frac{d\mu}{dx} = \frac{-nX'}{(y+X)^{n+1}}$, en faisant $dX = X'dx$. Je mets ces valeurs dans l'équation A, & elle devient $(n-1)My - nX'y - MX + nN = 0$, qui ne peut être identique à moins que $(n-1)M - nX' = 0$, $nN - MX = 0$. Je tire de-là $M = \frac{n}{n-1} X'$, $N = \frac{1}{n-1} XX'$; & j'ai l'équation $ydy + \frac{n}{n-1} ydX + \frac{1}{n-1} XdX = 0$, que je pourrai intégrer en la multipliant par $\frac{1}{(y+X)^n}$.

Mais cette équation qui est homogène a aussi pour facteur $\frac{1}{y^2+\frac{n}{n-1}yX+\frac{1}{n-1}X^2} =$ $\frac{1}{(y+X)(y+\frac{1}{n-1}X)}$; en faisant usage de ce facteur, on a à intégrer la différentielle $\frac{ydy}{(y+X)(y+\frac{1}{n-1}X)}$, par rapport à y seul, laquelle n'est autre que $\frac{n-1}{n-2}\left(\frac{dy}{y+X} - \frac{dy}{(n-1)y+X}\right)$, ainsi la proposée a pour intégrale complette log. $\frac{y+X}{((n-1)y+X)^{\frac{1}{n-1}}} + F:(x) = 0$.

On différentiera le premier membre de cette équation en faisant varier y & x, & on aura
$$\frac{dy+dX}{y+X} - \frac{(n-1)dy+dX}{(n-1)((n-1)y+X)} + dF:(x),$$
ou $\frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{(n-1)ydy+nydX+XdX}{(y+X)((n-1)y+X)} + dF:(x)$,
qui, comparé à $\frac{(n-1)ydy+nydX+XdX}{(y+X)((n-1)y+X)}$, donne évidemment $dF:(x)=0$, & pour l'intégrale demandée $\frac{(y+X)^{n-1}}{(n-1)y+X} = c$. De plus, si $\mu\alpha dx + \mu\mathcal{C}dy = dS$, $\mu F:(S)$ (page 290) est l'expression générale de tous les facteurs propres à rendre $\alpha dx + \mathcal{C}dy$ une différentielle exacte; donc ici cette expression générale est $\frac{1}{(y+X)((n-1)y+X)}$ $F:$

$\left(\frac{(y+X)^{n-1}}{(n-1)\,y+X}\right)$ qui comprend $\frac{1}{(y+X)^n}$. Lorſque $n=2$, la transformation que nous avons faite pour parvenir à l'intégrale précédente ne peut point avoir lieu ; car dans ce cas on a à intégrer $\frac{ydy}{(y+X)^2}$, dont l'intégrale eſt log. $(y+X)-\frac{y}{y+X}$ qu'il faut égaler à une conſtante arbitraire. Il y a encore le cas de $n=1$ où l'équation identique donne $\frac{N}{M}=X$, $X'=0$ & $X=$ conſtante; c'eſt-à-dire que ſi l'on propoſoit l'équation $ydy+Mydx+aMdx=0$, on pourroit la rendre intégrable en la diviſant par $y+a$, & ſon intégrale complette ſeroit $y-a$ log. $(y+a)+\int Mdx=c$.

Secondement, ſoit μ de cette forme $\frac{1}{(y^2+Xy+X1)^n}$, X & $X1$ étant toujours des fonctions de x & de conſtantes dont nous repréſenterons les différentielles par $X'dx$ & $X'1\,dx$. Nous aurons $\frac{d\mu}{dy}=\frac{-n(2y+X)}{(y^2+Xy+X1)^{n+1}}$, $\frac{d\mu}{dx}=\frac{-n(yX'+X'1)}{(y^2+Xy+X1)^{n+1}}$; & mettant ces valeurs dans l'équation A, nous la changerons en celle-ci $((2n-1).M-nX')y^2+((n-1).MX+2nN-nX'1)y+nNX-MX1=0$, qui devant être identique, donne néceſſairement $(2n-1).Mdx=ndX$, $(n-1).MXdx+2nNdx=ndX1$, $nNX=MX1$. On tire de la premiere & de la troiſiéme $Mdx=\frac{ndX}{2n-1}$,

$nNdx = \frac{MX1\,dx}{X} = \frac{nX1\,dX}{(2n-1).X}$; en ſubſtituant ces valeurs dans la ſeconde, il vient $dX1 - \frac{2X1\,dX}{(2n-1).X} = \frac{n-1}{2n-1}XdX$, qui eſt linéaire par rapport à $X1$, & qu'on rendra par conſéquent intégrable en la multipliant par $X^{\frac{-2}{2n-1}}$. Cela donne $X1 = \frac{1}{4}X^2 + cX^{\frac{2}{2n-1}}$. Donc ſi on a l'équation $ydy + \frac{n}{2n-1}ydx + \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{4}X + cX^{\frac{3-2n}{2n-1}}\right)dX = 0$, on la rendra intégrable en la diviſant par $(y^2 + Xy + \frac{1}{4}X^2 + cX^{\frac{2}{2n-1}})^n$.

Lorſque $n = \frac{1}{2}$, $dX = 0$ & $X = b$; les autres équations deviennent $-\frac{b}{2}Mdx + Ndx = \frac{1}{2}dX1$, $\frac{1}{2}bN = MX1$, & donnent $Mdx = \frac{2Ndx - dX1}{b} = \frac{bNdx}{2X1}$; d'où il eſt facile de tirer $Ndx = \frac{2X1\,dX1}{4X1 - b^2}$, $Mdx = \frac{bdX1}{4X1 - b^2}$. Ainſi l'équation $ydy + \frac{(by + 2X1)dX1}{4X1 - b^2} = 0$, deviendra intégrable étant diviſée par $\sqrt{(y^2 + by + X1)}$; or $\frac{ydy}{\sqrt{(y^2 + by + X1)}}$ intégré par rapport à y ſeul donne $\sqrt{(y^2 + by + X1)} + \frac{b}{2}\log.\left(\frac{b}{2} + y - \sqrt{(y^2 + by + X1)}\right)$; donc le premier membre de la propoſée aura pour intégrale la quantité précédente plus une fonction de $X1$ ſeul, dont

la différentielle est $\frac{b\,dX1}{b^2-4X1}$. Cette différentielle a pour intégrale $-\frac{b}{4}$ log. $\left(\frac{b^2}{4}-X1\right)$; donc enfin l'intégrale complette de la proposée sera $\sqrt{(y^2+by+X1)}$ $+\frac{b}{2}$ log. $\frac{\frac{b}{2}+y-\sqrt{(y^2+by+X1)}}{\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}-X1\right)}}$ = constante.

Le cas où $n=1$ mérite aussi quelqu'attention; alors l'équation à intégrer est $y\,dy+y\,dX+(c+\frac{1}{4})XdX=0$. Cette équation est homogène, & le calcul précédent fait voir que pour la rendre intégrable il faut la diviser par $y^2+Xy+(c+\frac{1}{4})X^2$, ce qui s'accorde bien avec ce que nous savions déja.

Nous supposerons troisiémement $\mu=\frac{1}{(y^3+Xy^2+X1y+X2)^n}$; d'où l'on tire $\frac{d\mu}{dy}=\frac{-n(3y^2+2Xy+X1)}{(y^3+Xy^2+X1y+X2)^{n+1}}$, $\frac{d\mu}{dx}=\frac{-n(y^2X'+yX'1+X'2)}{(y^3+Xy^2+X1y+X2)^{n+1}}$. Ces valeurs étant substituées dans l'équation A, elle devient $((3n-1).M-nX')y^3+((2n-1).MX+3nN-nX'1)y^2+((n-1).MX1+2nNX-nX'2)y+nNX1-MX2=0$, d'où l'on tire $(3n-1).Mdx=ndX$, $(2n-1).MXdx+3nNdx=ndX1$, $(n-1).MX1dx+2nNXdx=ndX2$, $nNX1-MX2=0$. La premiere & la derniere donnent $Mdx=\frac{ndX}{3n-1}$, $Ndx=\frac{X2\,dX}{(3n-1).X1}$; & mettant ces valeurs dans les deux autres, on a $(2n-1).X1XdX+3X2dX=(3n-1).X1dX1$,

$(n-1) \cdot X^2 1\, dX + 2 X 2\, X dX = (3n-1) \cdot X 1\, dX 2$, équations au moyen desquelles il faudroit pouvoir trouver $X1$ & $X2$ en X, ce qui paroît être fort difficile généralement.

Lorsque $n = 1$, ces équations deviennent $2X1dX1 = X1XdX + 3X2dX$, $X1dX2 = X2XdX$. Je tire de la seconde $X1 = \frac{X2XdX}{dX2}$, & différentiant en faisant $dX2$ constant, $dX1 = XdX + \frac{X2dX^2 + X2Xd^2X}{dX2}$, valeur qui étant substituée dans la premiere, la change en celle-ci :

$$\frac{X^2dXdX2 + 2X2XdX^2 + 2X2X^2d^2X}{dX2} = 3dX2;$$

qu'on multipliera par $\frac{dX}{dX2}$ pour avoir

$$\frac{X^2dX^2dX2 + 2X2XdX^3 + 2X2X^2dXd^2X}{dX^2 2} = 3dX,$$

dont l'intégrale est $\frac{X2X^2dX^2}{dX^2 2} = 3X + c1$. En donnant à cette derniere équation la forme que voici : $\frac{dX2}{\sqrt{X2}} = \frac{XdX}{\sqrt{(3X + c1)}}$, on voit qu'elle a pour intégrale complette $\sqrt{X2} = \left(\frac{X}{9} - \frac{2a}{27}\right) \sqrt{(3X + c1)} + c2$. Mais $X1 = \frac{X2XdX}{dX2} = \left(\frac{X}{9} - \frac{2a}{27}\right)(3X + c1) + c2\sqrt{(3X + c1)}$; donc $X1$ & $X2$ étant tels que nous venons de les définir, si on a l'équation $ydy + \frac{ydX}{2} + \frac{X2dX}{2X1} = 0$,

on la rendra intégrable en la divisant par $y^3+Xy^2+X1y+X2$.

L'équation du second ordre que nous venons d'intégrer, étant divisée par $X\sqrt{X2}$, devient $\frac{XdX}{\sqrt{X2}}+\frac{2dX^2\sqrt{X2}}{dX2}+\frac{2Xd^2X\sqrt{X2}}{dX2}=\frac{3dX2}{X\sqrt{X2}}$, & donne par l'intégration $\frac{2XdX\sqrt{X2}}{dX2}=3\int\frac{dX2}{X\sqrt{X2}}$, & $dX=\frac{3dX2}{2X\sqrt{X2}}\int\frac{dX2}{X\sqrt{X2}}$. Soit $\int\frac{dX2}{X\sqrt{X2}}=u$; on tire des deux dernieres équations $X=\frac{dX2}{du\sqrt{X2}}$ & $dX=\frac{3}{2}udu$; donc $X=\frac{3}{4}u^2+c1$; & par conséquent $\frac{dX2}{\sqrt{X2}}=\frac{3}{4}u^2du+c1du$. En intégrant on trouvera $2\sqrt{X2}=\frac{u^3}{4}+c1u+c2$, & $X2=\left(\frac{u^3}{8}+\frac{c1u+c2}{2}\right)^2$; on trouvera de plus $X1=\frac{X2XdX}{dX2}=\frac{3}{2}u\sqrt{X2}=\frac{3}{2}u\left(\frac{u^3}{8}+\frac{c1u+c2}{2}\right)$, $Mdx=\frac{dX}{2}=\frac{3}{4}udu$, $Ndx=\frac{X2dX}{2X1}=\frac{du\sqrt{X2}}{2}=\frac{du}{2}\left(\frac{u^3}{8}+\frac{c1u+c2}{2}\right)$.

Maintenant si l'on suppose $u=2x+2f$ pour que $X=3x^2+6fx+3f2+c1$,

$$X1=3(x+f)\left\{\begin{matrix}x^3+3fx^2+3f^2.x+f^3\\ \quad\;\; +c1\quad\;\; +c1f\\ \qquad\qquad\quad +\frac{c2}{2}\end{matrix}\right\},$$

$$X2 = \left(x^3 + 3fx^2 + 3f^2 \cdot x + f^3 \atop \quad + c1 \quad + c1f \quad + \frac{c2}{2}\right)^2,$$

on verra aisément, après avoir fait $3f = a$, $3f^2 + c1 = b$, $f^3 + c1f + \frac{c2}{2} = c$, que les calculs précédens nous apprennent que l'équation

$$ydy + (3x + a)ydx + (x^3 + ax^2 + bx + c)dx = 0,$$

deviendra intégrable étant divisée par $y^3 + (3x^2 + 2ax + b)y^2 + (3x + a)(x^3 + ax^2 + bx + c)y + (x^3 + ax^2 + bx + c)^2$. En supposant $x^3 + ax^2 + bx + c = (x + \alpha)(x + \beta)(x + \varepsilon)$, de maniere que $a = \alpha + \beta + \varepsilon$, $b = \alpha\beta + \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon$, $c = \alpha\beta\varepsilon$, le diviseur précédent deviendra $[y + (x + \alpha)(x + \beta)]$ $[y + (x + \alpha)(x + \varepsilon)][y + (x + \beta)(x + \varepsilon)]$, & il est clair que l'intégrale complette de notre équation est $[y + (x + \alpha)(x + \beta)]^{\varepsilon - \beta} \cdot [y + (x + \beta)(x + \varepsilon)]^{\beta - \alpha} \cdot [y + (x + \alpha)(x + \varepsilon)]^{\alpha - \varepsilon} =$ constante.

Nous avons fait $n = 1$, faisons maintenant $n = \frac{1}{3}$, & nous aurons $dX = 0$ ou $X = c1$; puis ces trois équations $-\frac{c1}{3}Mdx + Ndx = \frac{1}{3}dX1$, $-\frac{2}{3}MX1dx + \frac{2c1}{3}Ndx = \frac{1}{3}dX2$, $NX1 = 3MX2$; d'où l'on tire, en éliminant Mdx & Ndx,

$$\left(\frac{2c1X2}{X1} - \frac{2}{3}X1\right)dX1 = \left(\frac{3X2}{X1} - \frac{c1}{3}\right)dX2.$$

Nous ne voyons pas comment on pourroit résoudre cette équation généralement; mais en faisant $c1 = 0$, elle devient $9X2dX2 + 2X^21dX1 = 0$, & donne $\frac{9}{2}X^22 + \frac{2}{3}X^31 =$ constante, ou $X2 = \sqrt{(a - \frac{4}{27}X^31)}$.

$\sqrt{}(a - \frac{4}{27}X^3 1)$. On a aussi $Ndx = \frac{1}{3}dX1$, $Mdx = -\frac{dX2}{2X1} = \frac{X1}{9X2}dX1$. Soit maintenant $X1 = 3x$, d'où l'on tire $X2 = \sqrt{}(a - 4x^3)$, $Ndx = dx$, $Mdx = \frac{xdx}{\sqrt{}(a-4x^3)}$; & il s'ensuivra des calculs précédens que l'équation $ydy + \frac{xydx}{\sqrt{}(a-4x^3)} + dx = 0$ étant proposée, on pourra rendre son premier membre une différentielle exacte en le divisant par $\sqrt[3]{}(y^3 + 3xy + \sqrt{}(a - 4x^3))$.

Quatriémement, soit $\mu =$

$$\frac{1}{(y^4 + Xy^3 + X1y^2 + X2y + X3)^n}$$, d'où l'on tire

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{-n(4y^3 + 3Xy^2 + 2X1y + X2)}{(y^4 + Xy^3 + X1y^2 + X2y + X3)^{n+1}},$$

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{-n(X'y^3 + X'1y^2 + X'2y + X'3)}{(y^4 + Xy^3 + X1y^2 + X2y + X3)^{n+1}}.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation A, il vient une transformée de laquelle on tire $(4n-1).Mdx = ndX$, $(3n-1).MXdx + 4nNdx = ndX1$, $(2n-1)MX1dx + 3nNXdx = ndX2$, $(n-1).MX2dx + 2nNX1dx = ndX3$, $nNX2 = MX3$; ou, éliminant Mdx & Ndx, $(4n-1).X2dX1 = (3n-1).X2XdX + 4X3dX$, $(4n-1).X2dX2 = (2n-1).X1X2dX + 3X3XdX$, $(4n-1)X2dX3 = (n-1).X^2 2dX + 2X1X3dX$. Nous ne nous occuperons que du cas où $n = 1$; alors $Mdx = \frac{1}{3}dX$, $Ndx = \frac{1}{3}\frac{X3}{X2}dX$, & on a les trois équations $3X2dX1 = 2X2XdX + 4X3dX$; $3X2dX2 = X1X2dX + 3XX3dX$; $3X2dX3 = 2X1X3dX$. On éli-

minera $X1$ des deux dernieres, & on aura $\frac{2X3\,X2\,dX2 - X^2 2\,dX3}{X^2 3} = 2XdX$, qui étant intégrée, donnera $\frac{X^2 2}{X3} = X^2 + c1$, ou $X3 = \frac{X^2 2}{X^2 + c1}$. La seconde de nos équations donne $X1 = \frac{3dX2}{dX} - \frac{3XX3}{X2} = \frac{3dX2}{dX} - \frac{3XX2}{X^2 + c1}$, & différentiant en faisant dX constant, $dX1 = \frac{3d^2X2}{dX} - \frac{3XdX2}{X^2 + c1} + \frac{3X^2 X2\,dX - 3c1\,X2\,dX}{(X^2 + c1)^2}$; on tire aussi de la premiere $dX1 = \frac{2}{3}XdX + \frac{4}{3}\frac{X3\,dX}{X2} = \frac{2}{3}XdX + \frac{4}{3}\frac{X2\,dX}{X^2 + c1}$; on aura donc cette équation du second ordre $\frac{d^2X2}{dX} - \frac{XdX2}{X^2 + c1} + \frac{5X^2X2\,dX - 13c1\,X2\,dX}{9(X^2 + c1)^2} - \frac{2}{9}XdX = 0$, que nous n'entreprendrons pas d'intégrer généralement. Lorsque $c1 = 0$, $X3 = \frac{X^2 2}{X^2}$, $X1 = \frac{3dX2}{dX} - \frac{3X2}{X}$; & l'équation précédente se réduit à celle-ci $\frac{d^2X2}{dX^2} - \frac{dX2}{XdX} + \frac{5}{9}\frac{X2}{X^2} = \frac{2}{9}X$, qui est linéaire. Or je remarque qu'on satisfait à $\frac{d^2X2}{dX^2} - \frac{dX2}{XdX} + \frac{5}{9}\frac{X2}{X^2} = 0$, en faisant $X2 = X^\lambda$, λ étant donné par l'équation du second degré $\lambda^2 - 2\lambda + \frac{5}{9} = 0$, dont les deux racines sont $\frac{5}{3}$ & $\frac{1}{3}$; on aura donc (n°. 49) $X2 = \frac{1}{16}X^3 + aX^{\frac{5}{3}} + bX^{\frac{1}{3}}$, & par con-

ſéquent $X1 = \frac{1}{8} X^2 + 2aX^{\frac{2}{3}} - 2bX^{-\frac{2}{3}}$, $X3 = (\frac{1}{16} X^2 + aX^{\frac{2}{3}} + bX^{-\frac{2}{3}})^2$, $M dx = \frac{1}{3} dX$, $N dx = \frac{dX}{3X} (\frac{1}{16} X^2 + aX^{\frac{2}{3}} + bX^{-\frac{2}{3}})$. C'eſt pourquoi ſi l'on fait $X = t^3$, on aura l'équation $y dy + y t^2 dt + \frac{dt}{t^3} (\frac{1}{16} t^8 + a t^4 + b) = 0$, dont on pourra rendre le premier membre une différentielle exacte en le diviſant par $y^4 + t^3 y^3 + \left(\frac{1}{8} t^6 + 2 a t^2 - \frac{2b}{t^2}\right) y^2 + (\frac{1}{16} t^9 + a t^5 + bt) y + \left(\frac{1}{16} t^6 + a t^2 + \frac{b}{t^2}\right)^2$.

Nous ne ferons point d'autres tentatives relativement à l'équation $y dy + My dx + N dx = 0$; & nous nous occuperons de celle-ci $(y + N) dy + My dx = 0$. Dans cet exemple $\beta = y + N$, $\alpha = My$; & par conſéquent on a $\frac{d\beta}{dx} = N'$ (en faiſant $dN = N'dx$) & $\frac{d\alpha}{dy} = M$. Je ſuppoſerai premiérement que $\mu = \frac{y^{n-1}}{y^2 + Xy + X1}$, & que par conſéquent $\frac{d\mu}{dy} = \frac{(n-1).y^{n-2}}{y^2 + Xy + X1} - \frac{(2y + X) y^{n-1}}{(y^2 + Xy + X1)^2}$, $\frac{d\mu}{dx} = - \frac{(yX' + X'1) y^{n-1}}{(y^2 + Xy + X1)^2}$; en mettant ces valeurs dans l'équation A, j'aurai la transformée

$$\begin{array}{llll} (n-2).My^{n+1} & +(n-1).MXy^n & + nMX1y^{n-1} & = 0, \\ \quad -N' & \quad - N'X & - N'X1 & \\ \quad +X' & \quad + NX' & + NX'1 & \\ & \quad + X'1 & & \end{array}$$

de laquelle je tirerai les équations ſuivantes, $(n-2).Mdx=dN-dX$, $(n-1).MXdx=XdN-NdX-dX1$, $nMX1dx=X1dN-NdX1$.

Si $n=0$, on a d'abord $\frac{dX1}{X1}=\frac{dN}{N}$, & par conſéquent $X1=aN$; puis ces deux équations $2Mdx+dN-dX=0$, $MXdx+XdN-NdX-adN=0$; d'où l'on tire, en ôtant la ſeconde multipliée par 2 de la premiere multipliée par X, $-XdN-XdX+2NdX+2adN=0$, ou $dN+\frac{2NdX}{2a-X}=\frac{XdX}{2a-X}$, équation linéaire qu'on rendra intégrable en la diviſant par $(2a-X)^2$, & on aura $N=X-a+b(2a-X)^2$. Mais $2Mdx=dX-dN=2b(2a-X)dX$; ainſi l'équation $(y+X-a+b(2a-X)^2)dy+b(2a-X)ydX=0$ étant propoſée, on la rendra intégrable en la diviſant par $y^3+Xy^2+(a.(X-a)+ab.(2a-X)^2)y$.

Si $n=2$, alors on a $dN=dX$ & $N=a+X$, puis les deux équations $MXdx=XdX-(a+X)dX-dX1$, $2MX1dx=X1dX-(a+X)dX1$, deſquelles on tire en chaſſant Mdx, $2aX1dX-aXdX1=X(XdX1-X1dX)-2X1dX1$. Je ferai $X=uX1$; pour avoir $XdX1-X1dX=-X^2 1du$, $2X1dX-XdX1=2X^2 1du+uX1dX1$, & la transformée $2aX^2 1du+auX1dX1+X^3 1udu+2X1dX1=0$, qui devient $udu+\frac{2adu}{X1}+\frac{audX1}{X^2 1}+\frac{2dX1}{X^2 1}=0$, & que je transformerai, en faiſant $\frac{1}{X1}=z$, en celle-ci $dz-\frac{2azdu}{au+2}=\frac{udu}{au+2}$ qui eſt linéaire par rapport à z,

& que par conséquent je rendrai intégrable en la divisant par $(au+2)^2$. J'aurai de cette maniere $z = \frac{b(au+2)^2 - au - 1}{a^2}$; & $X_1 = \frac{a^2}{b(au+2)^2 - au - 1}$, $X = \frac{a^2 u}{b(au+2)^2 - au - 1}$, $N = a + X = \frac{ab(au+2)^2 - a}{b(au+2)^2 - au - 1}$. A cause de $2MX_1dx = X_1dN - NdX_1$, d'où je tire $2Mdx = X_1 d.\frac{N}{X_1}$, & de $\frac{N}{X_1} = \frac{b(au+2)^2 - 1}{a}$, d'où je tire $d.\frac{N}{X_1} = 2b(au+2)du$; j'aurai $Mdx = \frac{a^2 b(au+2)du}{b(au+2)^2 - au - 1}$.

Il suit de tout cela que l'équation $(b(au+2)^2(y+a) - (au+1)y - a)dy + a^2b(au+2)ydu = 0$ étant proposée, on pourra la rendre intégrable en la multipliant par $\frac{y}{(b.(au+2)^2 - au - 1)y^2 + a^2uy + a^2}$.

Si on fait dans cette équation $au+2 = \frac{-fx}{a}$, $b = \frac{ag}{f^2}$; on aura celle-ci $(gx^2+fx+a)ydy + (gx^2 - a)ady + agxydx = 0$, qu'on rendra intégrable en la multipliant par

$$\frac{y}{(gx^2+fx+a)y^2 - a(2a+fx)y + a^3}.$$

Soit en second lieu $\mu = \frac{Xy^n}{(1+X_1y+X_2y^2)^m}$, d'où l'on tirera $\frac{d\mu}{dy} = \frac{nXy^{n-1}}{(1+X_1y+X_2y^2)^m} - \frac{mXy^n(X_1+2X_2y)}{(1+X_1y+X_2y^2)^{m+1}}$, $\frac{d\mu}{dx} = \frac{X'y^n}{(1+X_1y+X_2y^2)^m}$

$-\frac{mXy^n(X'1y+X'2y^2)}{(1+X1y+X2y^2)^{m+1}}$; & en mettant ces valeurs dans l'équation A, la transformée

$$\begin{array}{llllll}(n+1).MXy^n&+&(n-m+1).MXX1y^{n+1}&+\\ -\ NX'&&-\ X'\\ -\ XN'&&-\ NX'X1\\ &&-\ N'XX1\\ &&+\ mNXX'1\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}(n-2m+1).MXX2y^{n+2}&+mXX'2y^{n+3}=0,\\ -\ X'X1&-\ X'X2\\ -\ NX'X2\\ -\ N'XX2\\ +\ mXX'1\\ +\ mNXX'2\end{array}$$

qui devant être identique, donne d'abord $\frac{mdX2}{X2}=\frac{dX}{X}$; & par conséquent $X=aX^m2$. On égalera à zero les coefficiens des autres termes, après avoir fait pour plus de simplicité $MX=P$ & $NX=Q$; & on aura ces trois équations $(n+1).Pdx=dQ$, $(n-m+1).PX1dx=dX+X1dQ-mQdX1$, $(n-2m+1).PX2dx=X1dX+X2dQ-mXdX1-mQdX2$. La premiere donne $Pdx=\frac{dQ}{n+1}$; on a aussi $X=aX^m2$ & $dX=amX^{m-1}2dX2$; c'est pourquoi si l'on met ces valeurs dans les deux autres, il viendra $QdX1=\frac{X1dQ}{n+1}+aX^{m-1}2\,dX2$, $QdX2=\frac{2X2dQ}{n+1}+aX^{m-1}2(X1dX2-X2dX1)$.

Lorsque $n=-2$, la premiere des deux équations

précédentes s'intégre aiſément, & elle donne alors $Q = \frac{b}{X_1} + \frac{a X^{m}_{2}}{m X_1}$; & mettant pour Q & dQ leurs valeurs dans la ſeconde, on a $\frac{a X_1}{m}$ $\left(\frac{(2m+1).X^{m}_{2} dX_2}{X^{2}_{1}} - \frac{2X^{m+1}_{2} dX_1}{X^{3}_{1}}\right) + aX^{m-1}_{2} (X_2 dX_1 - X_1 dX_2) + bX_1 \left(\frac{dX_2}{X^{2}_{1}} - \frac{2X_2 dX_1}{X^{3}_{1}}\right) = 0$, qu'on voit n'être autre que $\frac{aX_1}{mX^{m}_{2}}$ $d\frac{X^{2m+1}_{2}}{X^{2}_{1}} + aX^{m+1}_{2} d\frac{X_1}{X_2} + bX_1 d\frac{X_2}{X^{2}_{1}} = 0$. Je ferai pour ſimplifier $\frac{X^{2m+1}_{2}}{X^{2}_{1}} = p$, $\frac{X_1}{X_2} = q$, $\frac{X_2}{X^{2}_{1}} = r$; d'où je tirerai $X_1 = \frac{1}{qr}$, $X_2 = \frac{1}{q^2 r}$, $p = q^{-4m} r^{-2m+1}$; & l'équation précédente deviendra $\frac{a\sqrt{r}}{m\sqrt{p}} dp + \frac{a\sqrt{p}}{q\sqrt{r}} dq + b\,dr = 0$. Le premier terme de celle-ci deviendra intégrable étant multiplié par $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{r}} p^{\lambda}$, & le ſecond étant multiplié par $\frac{q\sqrt{r}}{\sqrt{p}} q^{\mu}$; mais on ne peut multiplier l'équation que par un même facteur, il eſt donc néceſſaire que $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{r}} p^{\lambda} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{p}} q^{\mu+1}$, ou que $p (= q^{-4m} r^{-2m+1})$ $= q^{\frac{\mu+1}{\lambda+1}} r^{\frac{1}{\lambda+1}}$; ce qui ſuppoſe que $\frac{\mu+1}{\lambda+1} = -4m$, $\frac{1}{\lambda+1} = -2m+1$; & par conſéquent que $\mu + 1 =$

$\frac{4m}{2m-1}$, $\lambda+1=\frac{-1}{2m-1}$; ainſi le facteur en queſtion ſera $q^{\frac{4m^2+2m}{2m-1}}r^m$. Je donne à l'équation $\frac{a}{m}$ $p^\lambda dp + aq^\mu dp + bq^{\frac{4m^2+2m}{2m-1}}r^m dr = 0$ la forme que voici : $ad\left(\frac{p^{\lambda+1}}{m.(\lambda+1)} + \frac{q^{\mu+1}}{\mu+1}\right) + bq^{\frac{4m^2+2m}{2m-1}}$ $r^m dr = 0$, qui devient, en faiſant les ſubſtitutions néceſſaires, $\frac{a(2m-1)}{4m} d\left(q^{\frac{4m}{2m-1}}.(1-4r)\right) + bq^{\frac{4m^2+2m}{2m-1}} r^m dr = 0$; & après l'avoir multipliée par $q^{\frac{4\theta m}{2m-1}}.(1-4r)^\theta$, ce qui la change en celle-ci : $\frac{a.(2m-1)}{4m} q^{\frac{4\theta m}{2m-1}}.(1-4r)^\theta d\left(q^{\frac{4m}{2m-1}}.(1-4r)\right) + bq^{\frac{4m^2+2m+4\theta m}{2m-1}}.(1-4r)^\theta.r^m dr = 0$, je remarque que chacun de ſes termes pourra s'intégrer ſéparément ſi $4m+2+4\theta=0$, d'où l'on tirera $\theta = -m-\frac{1}{2}$. Alors notre équation deviendra $\frac{-a}{2m}$ $\left(q^{\frac{4m}{2m-1}}.(1-4r)\right)^{\frac{1}{2}-m} + b\int(1-4r)^{-\frac{1}{2}-m}$ $r^m dr = c$; d'où il ſera facile de tirer q en r, & par conſéquent $X1$ & $X2$ en valeurs de la même quantité; de plus $X = aX^m2$, $N = \frac{b}{XX1} + \frac{aX^m2}{mXX1}$,

$-Mdx = \frac{d.NX}{X}$. Pour en donner un exemple, nous ferons $m = -\frac{1}{2}$, & nous aurons $aq.(1-4r) + b\int\frac{dr}{\sqrt{r}} = c$, ou $q = \frac{c-2b\sqrt{r}}{a(1-4r)}$; donc $X1 = \frac{a.(1-4r)}{(c-2b\sqrt{r}).r}$, $X2 = \frac{a^2.(1-4r)^2}{(c-2b\sqrt{r})^2.r}$, $X = \frac{(c-2b\sqrt{r}).\sqrt{r}}{1-4r}$, $NX = \frac{c-2b\sqrt{r}}{a.(1-4r)}\left(br - \frac{(c-2b\sqrt{r}).2r\sqrt{r}}{1-4r}\right)$, $N = \frac{b\sqrt{r}}{a} - \frac{(c-2b\sqrt{r}).2r\sqrt{r}}{a.(1-4r)}$,

$$Mdx = \frac{-bc+3.(b^2+c^2).\sqrt{r}-12bcr+4.(b^2+c^2).r\sqrt{r}}{a.(c-2b\sqrt{r}).(1-4r)^2.\sqrt{r}}.$$

En mettant dans $(y+N)dy + Mydx = 0$ pour N & Mdx les valeurs que nous venons de trouver, nous aurons une équation que nous pourrons rendre intégrable en la multipliant par $\frac{(c-2b\sqrt{r}).\sqrt{r}}{(1-4r).y^2}$

$$\sqrt{\left(1+\frac{a.(1-4r)}{(c-2b\sqrt{r}).r}y+\frac{a^2.(1-4r)^2}{(c-2b\sqrt{r})^2.r}\right)}.$$

Nous avons vu que dans le cas de $n = -2$ la premiere de nos deux équations de condition pouvoit être facilement intégrée; l'autre le sera dans le cas de $n = 2m - 1$, car elle devient alors

$$\frac{mQdX2 - X2dQ}{mX^{m+1}2} = a\frac{X1dX2 - X2dX1}{X^2 2},$$ & elle

a pour intégrale $\frac{Q}{mX^m 2} = \frac{aX1}{X2} + \frac{b}{m}$, d'où l'on tire $Q = amX1X^{m-1}2 + bX^m 2$. Cette valeur de Q étant substituée dans la premiere, elle deviendra $(2m-1).aX2X1dX1 - (m-1)aX^2 1dX2 - 2aX2dX2 + 2bX^2 2dX1 - bX1X2dX2 = 0$,

à laquelle on pourra donner la forme que voici :

$$\frac{2m-1}{2} a X2^{\frac{4m-3}{2m-1}} d\left(X2^{\frac{1}{2m-1}} . \left(\frac{X^2 1}{X2} - 4\right)\right)$$

$$+ \frac{b X^3 2}{X1} d \frac{X^2 1}{X2} = 0,$$ ou celle-ci, $(2m-1)$.

$$a X2^{\frac{-1}{2m-1}} d\left(X2^{\frac{1}{2m-1}} . \left(\frac{X^2 1}{X2} - 4\right)\right) + \frac{2 b X2}{X1} d . \frac{X^2 1}{X2} = 0.$$ Soit $\frac{X^2 1}{X2} = p$, $X2^{\frac{1}{2m-1}} \left(\frac{X^2 1}{X2} - 4\right) = q$;

on aura $X2^{\frac{1}{2m-1}} = \frac{q}{p-4}$, $X2 = \left(\frac{q}{p-4}\right)^{2m-1}$

& $X1 = \left(\frac{q}{p-4}\right)^{\frac{2m-1}{2}} . \sqrt{p}$. Par ces ſubſtitutions notre derniere équation deviendra $a . (2m-1) .$

$$(p-4) . \frac{dq}{q} + \frac{2 b dp}{\sqrt{p}} \left(\frac{q}{p-4}\right)^{\frac{2m-1}{2}} = 0,$$ ou

$$a . (2m-1) . \frac{dq}{q^{m+\frac{1}{2}}} + \frac{2 b dp}{(p-4)^{m+\frac{1}{2}} . \sqrt{p}} = 0;$$ laquelle étant intégrée donnera $a q^{\frac{1}{2} - m} = c +$

$$b \int \frac{dp}{(p-4)^{m+\frac{1}{2}} . \sqrt{p}}.$$

Un autre cas bien facile à réſoudre eſt celui où $n = -1$; on a alors $dQ = 0$ & $Q = c$, $X = a X^m 2$; en mettant ces valeurs dans les deux autres équations, on les change en celles-ci :

$$- P X1 dx = a X^{m-1} 2\, dX2 - c\, dX1,$$

$$-2 P X2 dx = a X1 X^{m-1} 2\, dX2 - a X^m 2\, dX1 - c\, dX2;$$

d'où l'on tire, en chassant Pdx, $aX^2 1 X^{m-1} 2dX2 - 2aX^m 2dX2 - aX^m 2X1dX1 + 2cX2dX1 - cX1dX2 = 0$. Je ferai $X^2 1 = X2u$, pour avoir $2X2dX1 - X1dX2 = X1X2\left(\frac{2dX1}{X1} - \frac{dX2}{X2}\right) = X1X2\frac{du}{u} = \frac{X2du\sqrt{X2}}{\sqrt{u}}$. Cela posé, si on met ces valeurs dans l'équation précédente, elle deviendra $\frac{a}{2}uX^m 2dX2 - 2aX^m 2dX2 - \frac{a}{2}X^{m+1} 2du + \frac{cX2du\sqrt{X2}}{\sqrt{u}} = 0$, ou $-\frac{a}{2}X^{m+2} 2d.\frac{u-4}{X2} + \frac{cX2du\sqrt{X2}}{\sqrt{u}} = 0$. On rendra cette équation intégrable en la divisant par $(u-4)^{m+\frac{1}{2}}X2\sqrt{X2}$, & l'intégrale sera $\frac{aX^{m-\frac{1}{2}}2}{(2m-1).(u-4)^{m-\frac{1}{2}}} + \int\frac{du}{(u-4)^{m+\frac{1}{2}}.\sqrt{u}} = e$. On aura donc $X2$ en fonction de u; & à cause de $X1 = \sqrt{X2u}$, $X = aX^m 2$, $NX = c$, $MXdx = \frac{cdX1 - aX^{m-1}2dX2}{X1}$, on aura aussi $X1$, X, NX, $MXdx$ donnés en fonction de la même quantité.

Si on eut supposé $m = \frac{1}{2}$, le premier terme de notre différentielle exacte eût été $\frac{-aX2}{2(u-4)}d.\frac{u-4}{X2}$, & on auroit eu pour équation intégrale $-\frac{a}{2}\log.\frac{u-4}{X2} + c\int\frac{du}{(u-4).\sqrt{u}} = e$, ou $\frac{a}{2}\log.\frac{X2}{u-4} - \frac{c}{2}$

$\log.\frac{\sqrt{u}+\sqrt{2}}{\sqrt{u}-\sqrt{2}}=e$. Je puis, en faisant $c=a\lambda$; donner à l'équation précédente la forme que voici: $\log.\frac{X2}{u-4}-\lambda\log.\frac{\sqrt{u}+2}{\sqrt{u}-2}=\log.f$; d'où je tire $X2=f(u-4)\left(\frac{\sqrt{u}+\sqrt{2}}{\sqrt{u}-\sqrt{2}}\right)^{\lambda}$, ou, en faisant $u=4z^2$, $X2=4f(z^2-1)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\lambda}$, ou même encore $X2=g(1-z^2)\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\lambda}$. Ainsi $X1=2z\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\sqrt{[g.(1-z^2)]}$, $X=a\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\sqrt{[g.(1-z^2)]}$, $NX=a\lambda$, $MXdx\left(=\frac{a\lambda dX1}{X1}-\frac{adX2}{X1\sqrt{X2}}\right)=$ (à cause de $X1=2z\sqrt{X2}$ & de $\frac{dX1}{X1}=\frac{dz}{z}+\frac{dX2}{2X2}\Big)\frac{a\lambda dz}{z}+\frac{a\lambda dX2}{2X2}-\frac{adX2}{2zX2}$; mais $\frac{dX2}{X2}=\frac{2\lambda dz-2zdz}{1-z^2}$, donc $MXdx=\frac{adz(1+\lambda^2-2\lambda z)}{1-z^2}$. Donc le facteur qui doit rendre intégrable l'équation

$$\frac{\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{[g(1-z^2)]}}\left(\frac{(1+\lambda^2-2\lambda z)ydz}{1-z^2}+\lambda dy\right)+$$

$ydy=0$, sera $a\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\sqrt{[g(1-z^2)]}$:

$y\sqrt{\left[1+2yz\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\sqrt{[g(1-z^2)]}+\right.}$
$\left. gy^2(1-z^2)\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\lambda}\right]$.

Si $m=-\frac{1}{2}$, on aura l'équation $\frac{-a(u-4)}{2X_2}+c\int\frac{du}{\sqrt{u}}=e$, ou $\frac{-a(u-4)}{X_2}+2c\sqrt{u}=-2f$; d'où l'on tire $X_2=\frac{a(u-4)}{4c\sqrt{u}+4f}$. On fera $u=4z^2$, pour que $X_2=\frac{a(z^2-1)}{2cz+f}$, & on aura $X_1=2z\sqrt{\left(\frac{a(z^2-1)}{2cz+f}\right)}$, $X=\sqrt{\left(\frac{a(2cz+f)}{z^2-1}\right)}$, $NX=c$, $MXdx=\frac{cdX_1}{X_1}-\frac{adX_2}{X_1X_2\sqrt{X_2}}=\frac{cdz}{z}+\frac{cdX_2}{2X_2}-\frac{adX_2}{2zX_2^2}$; mais $\frac{dX_2}{X_2}=\frac{2dz(cz^2+fz+c)}{(2cz+f)(z^2-1)}$, donc $MXdx=\frac{cdz}{z}+\frac{dz(cz^2+fz+c)(cz^3-3cz-f)}{z(2cz+f)(z^2-1)^2}$. Ainsi l'équation $\sqrt{\left(\frac{z^2-1}{a(2cz+f)}\right)}\left(cdy+\frac{cdz}{z}+\frac{dz(cz^2+fz+c)(cz^3-3cz-f)}{z(2cz+f)(z^2-1)^2}\right)+ydy=0$, aura pour facteur propre à la rendre intégrable cette quantité $\frac{1}{y}\sqrt{\left(\frac{a(2cz+f)}{z^2-1}\right)}\sqrt{\left[1+2yz\sqrt{\left(\frac{a(z^2-1)}{2cz+f}\right)}+\frac{ay^2(z^2-1)}{2cz+f}\right]}$. Je n'en dirai

pas davantage ſur les équations différentielles du premier ordre, & je paſſe à celles des ordres ſupérieurs.

77. Toutes celles du ſecond ordre pourront être repréſentées par $dp+\mu dx=0$, μ étant une fonction de x, y & $\frac{dy}{dx}=p$. Maintenant ſi A fonction de x, y, p eſt le facteur propre à rendre cette équation intégrable, on aura, en mettant A pour n & μA pour m dans les équations a & b du n°. 33, ces deux-ci

$$(A)\ldots\ldots 2\frac{dA}{dy}+\frac{d^2A}{dxdp}+p\frac{d^2A}{dydp}-\mu\frac{d^2A}{dp^2}-2\frac{d\mu}{dp}\cdot\frac{dA}{dp}-A\frac{d^2\mu}{dp^2}=0,$$

$$(B)\ldots\ldots\frac{d^2A}{dx^2}+2p\frac{d^2A}{dxdy}+p^2\frac{d^2A}{dy^2}-\mu\frac{d^2A}{dxdp}-\mu p\frac{d^2A}{dydp}-\frac{d\mu}{dp}\frac{dA}{dx}+\left(\mu-p\frac{d\mu}{dp}\right)\frac{dA}{dy}-\left(\frac{d\mu}{dx}+p\frac{d\mu}{dy}\right)\frac{dA}{dp}-\left(\frac{d^2\mu}{dxdp}+p\frac{d^2\mu}{dydp}-\frac{d\mu}{dy}\right)A=0.$$

Voici une maniere fort ſimple de parvenir aux mêmes équations de condition. On a les deux équations $dp+\mu dx=0$ & $dy-pdx=0$, qu'on ajoutera enſemble, après avoir multiplié la premiere par A, & l'autre par A', A & A' étant des fonctions de x, y, p, ce qui donnera $Adp+(A\mu-A'p)dx+A'dy=0$. On ſuppoſera enſuite que le premier membre de celle-ci eſt une différentielle exacte, & il en réſultera les trois équations de condition $\frac{dA}{dx}=$

$A\frac{d\mu}{dp}+\mu\frac{dA}{dp}-p\frac{dA'}{dp}-A', \frac{dA}{dy}=\frac{dA'}{dp}$,

$A\frac{d\mu}{dy}+\mu\frac{dA}{dy}-p\frac{dA'}{dy}=\frac{dA'}{dx}$. On mettra dans la premiere pour $\frac{dA'}{dp}$ fa valeur $\frac{dA}{dy}$, & on aura $A'=A\frac{d\mu}{dp}+\mu\frac{dA}{dp}-p\frac{dA}{dy}-\frac{dA}{dx}$. Cette valeur de A' étant fubftituée dans la premiere ou dans la feconde, il en réfultera l'équation A; fi on met cette même valeur dans la troifiéme, il en réfultera l'équation B; ainfi de toutes les manieres le problême fe réduit à trouver pour A une valeur qui fatisfaffe en même-tems aux équations A & B.

Suppofons que A ne doive pas renfermer p, & que la propofée foit $\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha\frac{dy^2}{dx^2}+\zeta\frac{dy}{dx}+\gamma=0$, ou α, ζ & γ ne renferment auffi que x & y fans p. A caufe de $\mu=\alpha p^2+\zeta p+\gamma$, d'où l'on tire $\frac{d\mu}{dp}=2\alpha p+\zeta$, $\frac{d^2\mu}{dp^2}=2\alpha$, & de $\frac{dA}{dp}=0$; les équations A & B deviendront $\frac{dA}{dy}-\alpha A=0$, $\frac{d^2A}{dx^2}-\zeta\frac{dA}{dx}+\gamma\frac{dA}{dy}-\left(\frac{d\zeta}{dx}-\frac{d\gamma}{dy}\right)A+2p\left(\frac{d^2A}{dxdy}-\alpha\frac{dA}{dx}-\frac{d\alpha}{dx}A\right)+p^2\left(\frac{d^2A}{dy^2}-\alpha\frac{dA}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}A\right)=0$, dont la feconde fe réduit à (ε)............

$$\frac{d^2A}{dx^2}-\zeta\frac{dA}{dx}+\gamma\frac{dA}{dy}-\left(\frac{d\zeta}{dx}-\frac{d\gamma}{dy}\right)A=0,$$

à cause de $\frac{dA}{dy} - \alpha A = 0$, qui donne $\frac{d^2A}{dxdy} - \alpha\frac{dA}{dx} - \frac{d\alpha}{dx}A = 0$, $\frac{d^2A}{dy^2} - \alpha\frac{dA}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}A = 0$.
On tire de l'équation $\frac{dA}{dy} - \alpha A = 0$ (n°. 54), $A = e^{\int\alpha dy}F:(x)$, & par conséquent $\frac{dA}{dy} = e^{\int\alpha dy}.\alpha F:(x)$, $\frac{dA}{dx} = e^{\int\alpha dy}\left(F':(x) + \int\frac{d\alpha}{dx}dy.F:(x)\right)$, $\frac{d^2A}{dx^2} = e^{\int\alpha dy}\left(F'':(x) + 2\int\frac{d\alpha}{dx}dy.F':(x) + \left(\int\frac{d\alpha}{dx}dy\right)^2F:(x) + \int\frac{d^2\alpha}{dx^2}dy.F:(x)\right)$; en substituant ces valeurs dans l'équation c, elle devient
$(c')\ldots\ldots F'':(x) + \left(2\int\frac{d\alpha}{dx}dy - 6\right)F':(x) + \left(\int\frac{d^2\alpha}{dx^2}dy + \left(\int\frac{d\alpha}{dx}dy\right)^2 - 6\int\frac{d\alpha}{dx}dy + \alpha\gamma - \frac{d6}{dx} + \frac{d\gamma}{dy}\right)F:(x) = 0$. On fera en sorte que dans cette équation les y disparoissent, ce qui donnera plusieurs équations qui devront se réduire à une seule, puisqu'il n'y a qu'une seule indéterminée; autrement il ne sera pas vrai que la proposée puisse devenir intégrable, étant multipliée par un facteur fonction de x & y seulement. Si dans l'équation c' les coefficiens de $F':(x)$, $F:(x)$ sont des fonctions déterminées de x seul, on aura à résoudre une équation linéaire de cette forme $\frac{d^2F:(x)}{dx^2} + X1\frac{dF:(x)}{dx} + X2F:(x) = 0$, qu'on réduira aisément par

par la méthode du n°. 49, à une équation différentielle du premier ordre. C'est à peu près ainsi que M. Bézout a résolu ce cas particulier dans le quatriéme volume de son Cours de Mathématiques à l'usage de la Marine. Ayant mis d'une autre maniere le Probléme général en équation, j'ai été conduit à une solution de ce même cas particulier, qui, je crois, mérite attention, & dont je parlerai lorsque j'aurai éclairci ce que je viens de dire, par des exemples.

L'équation du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2dy^2}{ydx^2} + \frac{2+3y}{xy}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x^2} = 0$ étant proposée, on demande si elle est susceptible de devenir intégrable par la multiplication d'un facteur fonction de x & y seulement. On a dans cet exemple $\alpha = \frac{2}{y}$, $6 = \frac{2+3y}{xy}$, $\varepsilon = \frac{2}{x^2}$, & $e^{\int \alpha dy} = y^2$. C'est pourquoi l'équation c' devient $F'':(x) - \frac{2+3y}{xy} F':(x) + \left(\frac{4}{x^2y} + \frac{2+3y}{x^2y}\right) F:(x) = 0$, ou $y(x^2F'':(x) - 3xF':(x) + 3F:(x)) - 2xF':(x) + 6F:(x) = 0$; & comme y doit disparoître de cette équation, on en tire $xF':(x) = 3F:(x)$, $x^2F'':(x) - 3xF':(x) + 3F:(x) = 0$. La premiere donne $F:(x) = x^3$, $F':(x) = 3x^2$, $F''(x) = 6x$; ces valeurs étant substituées dans la seconde y satisfont; il est donc possible de rendre la proposée intégrable en la multipliant par une fonction de x & y seulement; &, à cause de $A = e^{\int \alpha dy} F:(x)$, ce facteur est x^3y^2. Ainsi $x^3y^2 \frac{d^2y}{dx} +$

$\left(2x^3y\frac{dy^2}{dx^2}+(2x^2y+3x^2y^2)\frac{dy}{dx}+2xy^2\right)dx$ est la différentielle exacte d'une fonction du premier ordre ; & pour distinguer les trois termes de cette différentielle exacte (n°. 33), nous mettrons pour n & m leurs valeurs x^3y^2 & $2x^3y\frac{dy^2}{dx^2}+(2x^2y+3x^2y^2)\frac{dy}{dx}+2xy^2$ dans l'expression générale de π, & nous aurons $\pi=2x^3y\frac{dy^2}{dx^2}+2x^2y\frac{dy}{dx}$. Donc ayant écrit cette différentielle exacte comme il suit : $x^3y^2d\frac{dy}{dx}+\left(2x^3y\frac{dy}{dx}+2x^2y\right)dy+\left(3x^2y^2\frac{dy}{dx}+2xy^2\right)dx$, nous intégrerons son premier terme en regardant $\frac{dy}{dx}$ seul comme variable, & nous aurons pour l'intégrale totale $x^3y^2\frac{dy}{dx}+S$, S étant une fonction de x, y & de constantes ; en différentiant & comparant, nous trouverons $dS=2x^2ydy+2xy^2dx$, $S=x^2y^2+c$, & $x^3y^2\frac{dy}{dx}+x^2y^2+c=0$ pour l'intégrale premiere complette de l'équation différentielle du second ordre proposée.

Je prendrai pour second exemple l'équation linéaire $\frac{d^2y}{dx^2}+M\frac{dy}{dx}+Ny=0$; ici $\alpha=0$, $\mathcal{C}=M$, $\gamma=Ny$, $e^{\int\alpha dy}=1$; & l'équation c' devient $F'':(x)-MF':(x)+\left(N-\frac{dM}{dx}\right)F:(x)=0$, à laquelle il est

queſtion de ſatisfaire. En comparant cette derniere équation à l'équation générale, on trouve $\alpha = 0$, $\beta = -M$, $\varkappa = \left(N - \frac{dM}{dx}\right) F:(x)$, & que définitivement tout ſe réduit à ſatisfaire à $f'':(x) + Mf':(x) + Nf:(x) = 0$; c'eſt-à-dire que pour intégrer l'équation linéaire $\frac{dy}{dx^2} + M\frac{dy}{dx} + Ny = 0$, il ſuffit de trouver une valeur de y qui ſatisfaſſe à cette équation, propoſition que nous avons démontrée n°. 49.

Maintenant je ſuppoſe que le facteur ſoit donné, qu'il ſoit de cette forme $Xp + X1y$, X & $X1$ déſignant toujours des fonctions de x ſeul & de conſtantes; & je demande les conditions entre M & N pour que l'équation linéaire $\frac{d^2y}{dx} + Mdy + Nydx = 0$ devienne intégrable étant multipliée par ce facteur. On a $\mu = Mp + Ny$, $A = Xp + X1y$; en mettant ces valeurs dans les équations A & B, elles deviennent $2X1 - 2MX + \frac{dX}{dx} = 0$, $\left(\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{2dX1}{dx} - 2\frac{MdX + XdM}{dx}\right)p + \left(\frac{d^2X1}{dx^2} - \frac{MdX + XdM}{dx} - \frac{NdX + XdN}{dx} + 2NX1\right)y = 0$, dont la ſeconde ſe réduit à $\frac{d^2X1}{dx^2} - \frac{MdX1 + X1dM}{dx} - \frac{NdX + XdN}{dx} + 2NX1 = 0$, à cauſe que le coefficient de p n'eſt autre choſe que la différentielle de la premiere. Je tire de la premiere $M = \frac{X1}{X} + \frac{dX}{2Xdx}$; je donne enſuite à la ſeconde la forme que voici: $dN + \frac{NdX}{X} - \frac{2NX1dx}{X} = \frac{d^2X1}{Xdx} -$

$\frac{d.MX'}{X}$; & en l'intégrant, après l'avoir multipliée par $Xe^{-2\int\frac{X'dx}{X}}$, je trouve $NXe^{-2\int\frac{X'dx}{X}} = a + \int e^{-2\int\frac{X'dx}{X}}\left(\frac{d^2X'}{dx} - d.MX'\right) = a + e^{-2\int\frac{X'dx}{X}}\left(\frac{dX'}{dx} - MX'\right) + \int e^{-2\int\frac{X'dx}{X}}\left(\frac{2X'dX'}{X} - \frac{2MX'^2dx}{X}\right)$. En mettant pour M sa valeur dans le dernier terme de cette équation, il devient $\int e^{-2\int\frac{X'dx}{X}}\left(\frac{2X'dX'}{X} - \frac{2X'^3dx}{X^2} - \frac{X'^2dX}{X^2}\right) = e^{-2\int\frac{X'dx}{X}}.\frac{X'^2}{X}$; donc $NXe^{-2\int\frac{X'dx}{X}} = a + e^{-2\int\frac{X'dx}{X}}\left(\frac{dX'}{dx} - \frac{X'dX}{2Xdx}\right)$, & par conséquent $N = \frac{a}{X}e^{2\int\frac{X'dx}{X}} + \frac{dX'}{Xdx} - \frac{X'dX}{2X^2dx}$.

Ainsi ayant à intégrer l'équation $\frac{d^2y}{dx} + \left(\frac{X'}{X} + \frac{dX}{2Xdx}\right)dy + \left(\frac{adx}{X}e^{2\int\frac{X'dx}{X}} + \frac{dX'}{X} - \frac{X'dX}{2X^2}\right)y = 0$, on la multipliera par $X\frac{dy}{dx} + X'y$, & en intégrant on aura $\frac{Xdy^2}{2dx^2} + \frac{X'ydy}{dx} + \frac{1}{2}y^2\left(ae^{2\int\frac{X'dx}{X}} + \frac{X'^2}{X}\right) =$ constante.

Si je fais $e^{2\int\frac{X'dx}{X}} = \Upsilon$, pour avoir $\frac{2X'dx}{X} =$

$\frac{d\Psi}{\Psi}$, & $X1 = \frac{Xd\Psi}{2\Psi dx}$, $dX1 = \frac{Xd^2\Psi}{2\Psi dx} + \frac{dXd\Psi}{2\Psi dx} - \frac{Xd\Psi^2}{2\Psi^2 dx}$; notre équation deviendra $\frac{d^2y}{dx} + \left(\frac{d\Psi}{2\Psi dx} + \frac{dX}{2Xdx}\right)dy + \left(\frac{a\Psi dx}{X} + \frac{dXd\Psi}{4\Psi Xdx} - \frac{d\Psi^2}{2\Psi^2 dx} + \frac{d^2\Psi}{2\Psi dx}\right)y = 0$, que je pourrai rendre intégrable en la multipliant par $X\frac{dy}{dx} + \frac{Xyd\Psi}{2\Psi dx}$, & dont l'intégrale sera $\frac{Xdy^2}{2dx^2} + \frac{Xyd\Psi dy}{2\Psi dx^2} + \frac{1}{2}y^2\left(a\Psi + \frac{Xd\Psi^2}{4\Psi^2 dx^2}\right) =$ constante. Je remarque encore qu'en faisant $\frac{d\Psi}{\Psi} + \frac{dX}{X} = \frac{2d\sigma}{\sigma}$, j'aurai $X\Psi = \sigma^2$, $X = \frac{\sigma^2}{\Psi}$; & que ces substitutions changent la derniere équation en celle-ci $\frac{d^2y}{dx} + \frac{dyd\sigma}{\sigma dx} + \left(\frac{a\Psi^2 dx}{\sigma^2} + \frac{d\Psi d\sigma}{2\Psi\sigma dx} - \frac{3d\Psi^2}{4\Psi^2 dx} + \frac{d^2\Psi}{2\Psi dx}\right)y = 0$, qui étant multipliée par $\frac{\sigma^2 dy}{\Psi dx} + \frac{\sigma^2 yd\Psi}{2\Psi^2 dx}$, & ensuite intégrée donne $\frac{\sigma^2 dy^2}{2\Psi dx^2} + \frac{\sigma^2 yd\Psi dy}{2\Psi^2 dx^2} + \frac{1}{2}y^2\left(a\Psi + \frac{\sigma^2 d\Psi^2}{4\Psi^3 dx^2}\right) =$ constante, ou $\frac{\sigma^2}{2\Psi}\left(\frac{dy}{dx} + \frac{yd\Psi}{2\Psi dx}\right)^2 + \frac{a}{2}\Psi y^2 =$ constante.

Si dans cette derniere équation je fais la constante arbitraire $= 0$, j'aurai pour intégrale particuliere de

la proposée $\left(\frac{dy}{dx}+\frac{y\,d\Psi}{2\Psi dx}\right)^2=-\frac{a\Psi^2y^2}{\sigma^2}$, ou $\frac{dy}{y}+\frac{d\Psi}{2\Psi}=\frac{\Psi dx\sqrt{-a}}{\sigma}$, équation du premier ordre qui étant intégrée donnera $y=\frac{b}{\sqrt{\Psi}}e^{\int\frac{\Psi dx\sqrt{-a}}{\sigma}}$. Cette valeur de y satisfait à l'équation différentielle du second ordre dont il est question; cette autre valeur $y=\frac{c}{\sqrt{\Psi}}e^{-\int\frac{\Psi dx\sqrt{-a}}{\sigma}}$ lui satisfait aussi ; ainsi (n°. 49) $y=\frac{1}{\sqrt{\Psi}}\left(be^{\int\frac{\Psi dx\sqrt{-a}}{\sigma}}+ce^{-\int\frac{\Psi dx\sqrt{-a}}{\sigma}}\right)$ en sera l'intégrale finie complette.

Soit $\sigma=x^h(k+x)^i$, $\Psi=x^{h'}(k+x)^{i'}$; on aura $\frac{d\sigma}{\sigma dx}=\frac{h}{x}+\frac{i}{k+x}$, $\frac{d\Psi}{\Psi dx}=\frac{h'}{x}+\frac{i'}{k+x}$, $\frac{d^2\Psi}{\Psi dx^2}-\frac{d\Psi^2}{\Psi^2dx^2}=-\frac{h'}{x^2}-\frac{i'}{(k+x)^2}$, & l'équation du second ordre $\frac{d^2y}{dx}+\frac{h.(k+x)+ix}{x(k+x)}dy$ $+\left(2ax^{2(h'-h)}(k+x)^{2(i'-i)}+\frac{h'(2h-h'-2)}{2x^2}+\frac{hi'+h'i-h'i'}{x(k+x)}+\frac{i'(2i-i'-2)}{2(k+x)^2}\right)\frac{ydx}{2}=0$, qu'on rendra intégrable en la multipliant par $x^{2h'-h}(k+x)^{2i-i}\left(\frac{dy}{dx}+\frac{h'(k+x)+i'x}{2x(k+x)}y\right)$.

Je remarquerai quelques cas particuliers ; 1°. celui où $h=h'+1$, $i=i'$, & où l'équation devient

$\frac{d^2y}{dx} + \frac{(h'+1)(k+x)+i'x}{x(k+x)}dy + \left(\frac{4a+h'^2}{2x^2} + \frac{(h'+1)i'}{x(k+x)} + \frac{i'(i'-2)}{2(k+x)^2}\right)\frac{ydx}{2} = 0$, qu'on rendra intégrable en la multipliant par $x^{h'+2}(k+x)^{i'}\left(\frac{dy}{dx} + \frac{h'(k+x)+i'x}{2x(k+x)}y\right)$. Je ferai dans ce cas particulier $i'=2$ & $a=-\frac{1}{4}h'^2$, & j'aurai l'équation $\frac{d^2y}{dx} + \frac{(h'+1)k+(h'+3)x}{x(k+x)}dy + \frac{(h'+1)ydx}{x(k+x)} = 0$, que je pourrai rendre intégrable en la multipliant par $x^{h'+2}(k+x)^2\left(\frac{dy}{dx} + \frac{h'(k+x)+2x}{2x(k+x)}y\right)$.

2°. Le cas particulier où $h=h'$, $i=i'+1$, & où l'équation devient $\frac{d^2y}{dx} + \frac{h'(k+x)+(i'+1)x}{x(k+x)}dy + \left(\frac{h'(h'-2)}{x^2} + \frac{2h'(i'+1)}{x(k+x)} + \frac{i'^2+4a}{(k+x)^2}\right)\frac{ydx}{4} = 0$, qu'on rendra intégrable en la multipliant par $x^{h'}(k+x)^{i'+2}\left(\frac{dy}{dx} + \frac{h'(k+x)+i'x}{2x(k+x)}y\right)$. Je ferai dans ce cas particulier $h'=2$ & $a=-\frac{1}{4}i'^2$, & j'aurai l'équation $\frac{d^2y}{dx} + \frac{2k+(i'+3)x}{x(k+x)}dy + \frac{(i'+1)ydx}{x(k+x)} = 0$, que je pourrai rendre intégrable en la multipliant par $x^2(k+x)^{i'+2}\left(\frac{dy}{dx} + \frac{2(k+x)+i'x}{2x(k+x)}y\right)$. 3°. Le cas particulier où $h=$

$h' + \frac{1}{2}$, $i = i' + \frac{1}{2}$, & où l'équation devient $\frac{d^2 y}{dx} + \frac{(2h'+1)(k+x)+(2i'+1)x}{2x(k+x)} dy + \left(\frac{h'(h'-1)}{x^2} + \frac{2h'i'+h'+i'+4a}{x(k+x)} + \frac{i'(i'-1)}{(k+x)^2}\right)\frac{y\,dx}{4} = 0$, qu'on rendra intégrable en la multipliant par $x^{h'+1}(k+x)^{i'+1}$ $\left(\frac{dy}{dx} + \frac{h'(k+x)+i'x}{2x(k+x)} y\right)$.

Soit encore $\sigma = x^h(k^2+x^2)^i$, $\Psi = x^{h'}(k^2+x^2)^{i'}$; on aura $\frac{d\sigma}{\sigma dx} = \frac{h}{x} + \frac{2ix}{k^2+x^2}$, $\frac{d\Psi}{\Psi dx} = \frac{h'}{x} + \frac{2i'x}{k^2+x^2}$, $\frac{d^2\Psi}{\Psi dx^2} - \frac{d\Psi^2}{\Psi^2 dx^2} = -\frac{h'}{x^2} + \frac{2i'}{k^2+x^2} - \frac{4i'x^2}{(k^2+x^2)^2}$, & l'équation du second ordre $\frac{d^2 y}{dx} + \frac{h(k^2+x^2)+2ix^2}{x(k^2+x^2)} dy + \left(\frac{h'(2h-h'-2)}{x^2} + \frac{2h'i+2i'(h+h'+1)}{k^2+x^2} + \frac{2i'(2i-i'-2)x^2}{(k^2+x^2)^2} + 2ax^{2(h'-h)}(k^2+x^2)^{2(i'-i)}\right)\frac{y\,dx}{2} = 0$, qu'on rendra intégrable en la multipliant par $x^{2h-h'}(k^2+x^2)^{2i-i'}$ $\left(\frac{dy}{dx} + \frac{h'(k^2+x^2)+2i'x^2}{x(k^2+x^2)} y\right)$. Je laiſſe à examiner ſi dans cet exemple, comme dans le précédent, il y a quelques cas particuliers qui méritent d'être remarqués; je ne m'arrêterai pas non plus à chercher d'autres cas d'intégrabilité de l'équation linéaire du ſecond ordre, en prenant pour facteur des fonctions d'une forme plus générale; & je terminerai cet ar-

ticle par résoudre le Problême suivant, qui achevera de nous rendre familier l'usage des équations A & B.

Intégrer l'équation du second ordre $\frac{d^2y}{dx} + \frac{dy^2}{ydx} + \frac{axdx}{y^2} = 0$. On verra aisément qu'ici le facteur ne peut point être une fonction de x & y seulement; nous le supposerons de cette forme $Mp^2 + Np + P$, M, N & P étant des fonctions de x, y, & de constantes. Cela posé, en faisant dans l'équation A les substitutions convenables, on la changera en celle-ci:

$$\begin{aligned} 2\frac{dP}{dy} &+ 3\frac{dN}{dy}.p + 4\frac{dM}{dy}.p^2 = 0; \\ - \frac{2P}{y} &- \frac{6N}{y} \quad - \frac{12M}{y} \\ + \frac{dN}{dx} &+ 2\frac{dM}{dx} \\ - \frac{2aMx}{y^2} & \end{aligned}$$

& comme M, N, P ne doivent pas renfermer p par l'hypothèse, on en tirera $\frac{dM}{dy} - \frac{3M}{y} = 0$, $3\frac{dN}{dy} - \frac{6N}{y} + 2\frac{dM}{dx} = 0$, $2\frac{dP}{dy} - \frac{2P}{y} + \frac{dN}{dx} - \frac{2aMx}{y^2} = 0$, équations aux différences partielles qui étant intégrées par la méthode du n°. 54, donneront $M = y^3F:(x)$, $N = y^2f:(x) - \frac{y^4}{3}F':(x)$, $P = y\varphi:(x) - \frac{y^3}{4}f':(x) + \frac{y^5}{24}F'':(x) + axy^2F:(x)$; & par conséquent $A = y^3p^2F:(x) + y^2pf:(x) - \frac{y^4p}{3}F':(x) + y\varphi:(x) - \frac{y^3}{4}f':(x) +$

$\frac{y^5}{24}F'':(x)+axy^2F:(x)$. Telle eſt la forme la plus générale que l'équation A permette de donner au facteur d'après notre ſuppoſition ; mais cette valeur du facteur doit auſſi ſatisfaire à l'équation B, ce qui en limitera la généralité. Ayant fait les ſubſtitutions néceſſaires dans cette équation, il en viendra une dans laquelle y & p devront diſparoître, & il ſuffira pour cela de faire $F':(x)=0$, $f:(x)=0$, $\varphi:(x)=0$. C'eſt pourquoi ſi l'on fait $=1$ la conſtante qui eſt la valeur de $F:(x)$, on aura $A=y^3p^2+axy^2$, & cette différentielle exacte $\left(y^3\frac{dy^2}{dx^2}+axy^2\right)\frac{d^2y}{dx}+y^2\frac{dy^4}{dx^3}+\frac{2axydy^2}{dx}+a^2x^2dx$ dont on pourra repréſenter l'intégrale par $\frac{1}{3}y^3\frac{dy^3}{dx^3}+axy^2\frac{dy}{dx}+S$, S étant une fonction de y, x & de conſtantes. En différentiant & comparant, on trouvera $dS=-ay^2dy+a^2x^2dx$ & $S=-\frac{ay^3}{3}+\frac{a^2x^3}{3}+c$; ainſi l'intégrale premiere complette de notre équation du ſecond ordre ſera $y^3\frac{dy^3}{dx^3}+3axy^2\frac{dy}{dx}-ay^3+a^2x^3+3c=0$.

Je remarquerai en paſſant que ſi l'on donne à cette équation du ſecond ordre, qui n'eſt autre que $yd.\frac{ydy}{dx}+axdx=0$, la forme que voici $d\frac{dy}{du}+adu\int y\,du=0$, en faiſant $\frac{dx}{y}=du$; & qu'enſuite

on la différentie, en prenant du constant, on aura cette équation linéaire du troisiéme ordre $\frac{d^3y}{du^3}+ay=0$, qui n'est qu'un cas très-particulier de celle que nous avons intégrée page 219. Au reste cette équation n'est pas la seule qui puisse s'intégrer de cette maniere; celle-ci $2y^3d^2y+y^2dy^2=(a+bx+cx^2)dx^2$ est dans le même cas. En effet, si l'on suppose $dx=ydu$, & que l'on fasse du constant, cette équation deviendra $2yd^2y-dy^2=(a+b\int ydu+c(\int ydu)^2)du^2$; &, en la différentiant deux fois pour faire disparoître les deux signes d'intégration, on aura l'équation linéaire du quatriéme ordre $d^4y=cydu^4$.

78. Je reprens l'équation générale du second ordre $dp+\mu dx=0$, à laquelle je puis donner la forme suivante $d^2y+\alpha dy^2+\beta dydx+\varepsilon dx^2=0$, α, β, & ε étant des fonctions connues de x, y, p. Cela posé, A & K étant des fonctions inconnues des mêmes variables, je suppose $Ad^2y+A\alpha dy^2+A\beta dydx+A\varepsilon dx^2=d(Ady+AKdx)=Ad^2y+\frac{dA}{dy}dy^2+\left(\frac{dA}{dx}+K\frac{dA}{dy}+A\frac{dK}{dy}\right)dxdy+\left(K\frac{dA}{dx}+A\frac{dK}{dx}\right)dx^2+\frac{dA}{dp}dydp+\left(K\frac{dA}{dp}+A\frac{dK}{dp}\right)dxdp$; & pour pouvoir comparer terme à terme les deux membres de cette transformée, je mets dans le premier, au lieu de Ad^2y & de $A\alpha dy^2+A\beta dydx+A\varepsilon dx^2$, ce qui suit $(1-Np-P)Ad^2y+ANdydp+APdxdp$ & $(\alpha+Q)Ady^2+\left(\beta-Qp-\frac{R}{p}\right)Adxdy+(\varepsilon+R)Adx^2$; elle

devient par-là $(1-Np-P)Ad^2y+(\alpha+Q)Ady^2+\left(\mathsf{C}-Qp-\frac{R}{p}\right)Adxdy+(\varkappa+R)Adx^2+ANdydp+APdxdp=Ad^2y+\frac{dA}{dy}dy^2+\left(\frac{dA}{dx}+K\frac{dA}{dy}+A\frac{dK}{dy}\right)dxdy+\left(K\frac{dA}{dx}+A\frac{dK}{dx}\right)dx^2+\frac{dA}{dp}dydp+\left(K\frac{dA}{dp}+A\frac{dK}{dp}\right)dxdp$; il n'eſt pas néceſſaire de dire que N, P, Q, R ſont auſſi des fonctions inconnues de x, y, p. Maintenant, notre transformée étant ainſi préparée, j'y puis faire
$(1-Np-P)A=A$,

$$(\alpha+Q)A=\frac{dA}{dy},$$

$$\left(\mathsf{C}-Qp-\frac{R}{p}\right)A=\frac{dA}{dx}+K\frac{dA}{dy}+A\frac{dK}{dy},$$

$$(\varkappa+R)A=K\frac{dA}{dx}+A\frac{dK}{dx},$$

$$NA=\frac{dA}{dp},$$

$$PA=K\frac{dA}{dp}+A\frac{dK}{dp};$$

d'où l'on tire,

$$\frac{dA}{dy}:A=(a1)\ldots\alpha+Q,$$

$$\frac{dA}{dx}:A=(a2)\ldots\mathsf{C}-Qp-\frac{R}{p}-K(\alpha+Q)-\frac{dK}{dy}.$$

$\frac{dA}{dx} : A = (a3) \ldots \frac{\varepsilon + R - \frac{dK}{dx}}{K}$,

$\frac{dA}{dp} : A = (a4) \ldots - \frac{dK}{dp} : (K + p)$;

on remarquera auffi que les deux valeurs de $\frac{dA}{dx}$: A donnent l'équation $(A1) \ldots\ldots (\alpha + Q) K^2 - \left(\zeta - Qp - \frac{R}{p}\right) K + \varepsilon + R + K \frac{dK}{dy} - \frac{dK}{dx} = 0$.

Nous nous occuperons d'abord du cas particulier où α, ζ, ε ne renfermant que x & y, le facteur A n'eft lui-même fonction que de ces deux variables; alors on aura Q, P, R nuls, & à caufe de $\frac{dA}{dp} : A = - \frac{dK}{dp} : (K + p)$, on aura auffi $\frac{dK}{dp} = 0$, c'eft-à-dire que K ne fera fonction que de x & y. Les équations précédentes deviendront $\frac{dA}{dy} : A = \alpha$,

$\frac{dA}{dx} : A = \zeta - \alpha K - \frac{dK}{dy}$, $\frac{dA}{dx} : A = \frac{\varepsilon - \frac{dK}{dx}}{K}$;

& en égalant les deux valeurs de $\frac{dA}{dx} : A$, on aura

$(z) \ldots\ldots \varepsilon - \zeta K + \alpha K^2 + K \frac{dK}{dy} - \frac{dK}{dx} = 0$.

Il eft clair que $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\left(\zeta - \alpha K - \frac{dK}{dy}\right)}{dy} = \frac{d.\frac{\varepsilon - \frac{dK}{dx}}{K}}{dy}$, & que ces deux équations donnent

$$\frac{d^2K}{dy^2} = \frac{d\beta}{dy} - \quad \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}K - \alpha\frac{dK}{dy},$$

$$\frac{d^2K}{dxdy} = \frac{d\gamma}{dy} - K\,\frac{d\alpha}{dx} - \frac{\gamma - \frac{dK}{dx}}{K}\,\frac{dK}{dy};$$

on voit auſſi que la différentielle du ſecond membre de la premiere de ces deux-ci, priſe en ne faiſant varier que x, & diviſée par dx, doit être égale à la différentielle du ſecond membre de l'autre, priſe en ne faiſant varier que y, & diviſée par dy. On trouve par-là cette équation

$$\left(\frac{d^2\beta}{dxdy} - \frac{d^2\alpha}{dx^2} - \frac{d^2\gamma}{dy^2}\right)K^3 - \frac{d\alpha}{dy}\,\frac{dK}{dx}\,K^2 -$$
$$\left(\alpha K^2 + K\,\frac{dK}{dy}\right)\frac{d^2K}{dxdy} + \left(\gamma - \frac{dK}{dx}\right)K\,\frac{d^2K}{dy^2} +$$
$$\frac{d\gamma}{ay}\,\frac{dK}{dy}\,K - \left(\gamma - \frac{dK}{dx}\right)\left(\frac{dK}{dy}\right)^2 = 0,$$

qui, en mettant pour $\frac{d^2K}{dy^2}$ & $\frac{d^2K}{dxdy}$ leurs valeurs, & faiſant pour abréger $\frac{d^2\beta}{dxdy} - \frac{d^2\alpha}{dx^2} - \alpha\frac{d\gamma}{dy} - \gamma\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d^2\gamma}{dy^2} = a$, deviendra ($\beta$) . . . .

$$aK + \alpha\frac{d\alpha}{dx}K^2 + \left(\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy}\right)\frac{dK}{dx} + \frac{d\alpha}{dx}\,\frac{dK}{dy}$$
$$K + \gamma\ \left(\frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dx}\right) = 0.$$ Cela poſé, en écrivant b pour $\frac{a + \beta\left(\frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dx}\right)}{\frac{d\beta}{dy} - 2\,\frac{d\alpha}{dx}}$, il ſera facile

de tirer des équations α & β, $\frac{dK}{dy}=b-\alpha K$, $\frac{dK}{dx}=\varepsilon-(\beta-b)K$; & par conséquent $\frac{dA}{dy}:A=\alpha$, $\frac{dA}{dx}:A=\beta-b$. Ainsi $\frac{dA}{A}=\alpha dy+(\beta-b)dx$, & $A=e^{\int(\alpha dy+(\beta-b)dx)}$; quant à K, il est donné par l'équation $dK+K(\alpha dy+(\beta-b)dx)=bdy+\varepsilon dx$, d'où l'on tire évidemment $K=e^{-\int(\alpha dy+(\beta-b)dx)}(c+\int e^{\int(\alpha dy+(\beta-b)dx)}(bdy+\varepsilon dx)$. Donc la proposée a pour intégrale premiere complette $dye^{\int(\alpha dy+(\beta-b)dx)}+dx(c+\int e^{\int(\alpha dy+(\beta-b)dx)}(bdy+\varepsilon dx))=0$. Cette expression feroit absurde, si $\alpha dy+(\beta-b)dx$ & $e^{\int(\alpha dy+(\beta-b)dx)}(bdy+\varepsilon dx)$ n'étoient des différentielles exactes. Les équations de condition que cela donnera seront donc aussi celles qui devront avoir lieu pour que la proposée puisse devenir intégrable étant multipliée par une fonction de x & y seulement : voici ces équations de condition (ε)....
$\frac{d\alpha}{dx}-\frac{d\beta}{dy}+\frac{db}{dy}=0$, ($\delta$)..............
$\frac{db}{dx}+b(\beta-b)-\frac{d\varepsilon}{dy}-\alpha\varepsilon=0$.

Si nous prenons pour exemple l'équation $d^2y+\frac{2}{y}dy^2+\frac{2+3y}{xy}dydx+\frac{2}{x^2}dx^2=0$, ou $\alpha=\frac{2}{y}$, $\beta=\frac{2+3y}{xy}$, $\varepsilon=\frac{2}{x^2}$, $a=\frac{6}{x^2y^2}$, $b=\frac{2}{xy}$, nous verrons aisément que $\alpha dy+(\beta-b)dx=\frac{2dy}{y}+\frac{3dx}{x}$ est une différentielle exacte dont l'intégrale est log. x^3y^2, & que $e^{\int(\alpha dy+(\beta-b)dx)}(bdy+\varepsilon dx)=2x^2ydy+2xy^2dx$ est aussi une différen-

tielle exacte qui a pour intégrale x^2y^2. Ainsi la proposée a pour intégrale premiere complette $x^3y^2dy + x^2y^2dx + cdx = 0$.

On a $b = \frac{a + \beta\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dx}\right)}{\frac{d\beta}{dy} - 2\frac{d\alpha}{dx}}$; or $\frac{d\beta}{dy} - 2\frac{d\alpha}{dx}$ peut être nul de deux manieres, ou parce que β ne renferme point $d'y$, & α point $d'x$, ou parce que $\frac{d\beta}{dy} = 2\frac{d\alpha}{dx}$; il faut donc examiner ce qui arrive dans ces deux cas. De quelle maniere que $\frac{d\beta}{dy} - 2\frac{d\alpha}{dx}$ devienne nul, on tire alors des équations α & β, $a + \beta\left(\frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dx}\right) = 0$; c'est-à-dire que dans l'un & l'autre cas la fonction b se présente sous cette forme $\frac{0}{0}$ qu'il s'agit de déterminer. L'équation α donne $\frac{db}{dy} = \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dx}$; soit $\frac{\beta}{2} - b = b'$, on aura $\frac{db'}{dy} = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\beta}{dy} - 2\frac{d\alpha}{dx}\right) = 0$, & b' sera visiblement fonction de x seul & de constantes. En mettant dans l'équation δ, pour b sa valeur $\frac{\beta}{2} - b'$, on la changera en celle-ci (E)..............
$\frac{db'}{dx} + b'^2 = \frac{\beta^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\varkappa}{dy} - \alpha\varkappa$, dont le second membre ne renferme d'autre variable que x, puisque $a + \beta\left(\frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dx}\right)$ que l'on fait être $= 0$, n'est

n'eſt autre choſe que $\dfrac{d\left(\frac{\beta^2}{4}+\frac{1}{2}\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\gamma}{dy}-\alpha\gamma\right)}{dy}$:

Ainſi dans les deux cas que nous examinons, tout ſe réduit à trouver pour b' une valeur qui ſatisfaſſe à l'équation E ; & la propoſée aura pour intégrale premiere complette $dy\,e^{\int(\alpha dy+(\frac{\beta}{2}+b')dx)}+dx\,(c+\int e^{\int(\alpha dy+(\frac{\beta}{2}+b')dx)}((\frac{\beta}{2}-b')dy+\gamma dx))=0$, qui ſera toujours poſſible.

On pourroit demander quels doivent être α & γ ; β étant tout ce qu'on voudra, pour que la propoſée ait pour intégrale premiere complette l'équation du premier ordre que nous venons de trouver. A cauſe de $\frac{d\beta}{dy}=2\frac{d\alpha}{dx}$, & de $\frac{\beta^2}{4}+\frac{1}{2}\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\gamma}{dy}-\alpha\gamma=X$, on entend par X une fonction quelconque de x & de conſtantes ; on aura (n°. 54) $\alpha=\frac{1}{2}\int\frac{d\beta}{dy}dx+\varphi:(y)$, $\gamma=e^{-\int\alpha dy}\,F:(x)+\int e^{\int\alpha dy}\left[\frac{\beta^2}{4}+\frac{1}{2}\frac{d\beta}{dx}-X\right]dy$. Si β doit être fonction de x ſeul, alors $\alpha=\varphi:(y)$ & γ ſera de cette forme $F:(x)e^{-\int dy\,\varphi:(y)}+yf:(x)-f:(x)e^{-\int dy\,\varphi:(y)}.\int y\,dy\,e^{\int dy\,\varphi:(y)}\varphi:(y)$; cette expreſſion devient $F:(x)+yf:(x)$ lorſque $\alpha=0$, c'eſt le cas où l'équation eſt linéaire.

79. Occupons-nous maintenant du Problême général. Nous formerons les équations $\frac{da1}{dx}=\frac{da2}{dy}$, $\frac{da1}{dx}=\frac{da3}{dy}$, $\frac{da1}{dp}=\frac{da4}{dy}$, $\frac{da2}{dp}=\frac{da4}{dx}$;

$\frac{da3}{dp} = \frac{da4}{dx}$; desquelles nous tirerons

$$\frac{d^2K}{dy^2} = (b1) \ldots \frac{d\left(\mathrm{C} - Qp - \frac{R}{p}\right)}{dy} - \frac{d(\alpha+Q)}{dx}$$
$$- K\frac{d(\alpha+Q)}{dy} - (\alpha+Q)\frac{dK}{dy},$$

$$\frac{d^2K}{dxdy} = (b2) \ldots \frac{d(\nu+R)}{dy} - K\frac{d(\alpha+Q)}{dx} -$$
$$\frac{\nu+R}{K}\,\frac{dK}{dy} + \frac{\frac{dK}{dx}\cdot\frac{dK}{dy}}{K},$$

$$\frac{d^2K}{dydp} = (b3) \ldots - (K+p)\frac{d(\alpha+Q)}{dp} + \frac{\frac{dK}{dy}\cdot\frac{dK}{dp}}{K+p},$$

$$\frac{d^2K}{dxdp} = (b4) \ldots (K+p)\left[(\alpha+Q)\frac{dK}{dp} -\right.$$
$$\left. p\frac{d(\alpha+Q)}{dp} - \frac{d\left(\mathrm{C} - Qp - \frac{R}{p}\right)}{dp}\right] + \frac{dK}{dy}\cdot\frac{dK}{dp}$$
$$+ \frac{\frac{dK}{dx}\cdot\frac{dK}{dp}}{K+p},$$

$$\frac{d^2K}{dxdp} = (b5) \ldots \frac{K+p}{p}\left[\frac{d(\nu+R)}{dp} - \frac{\nu+R}{K}\,\frac{dK}{dp}\right]$$
$$+ \frac{2K+p}{K^2+Kp}\,\frac{dK}{dx}\cdot\frac{dK}{dp};$$

puis en égalant ensemble les deux valeurs de $\frac{d^2K}{dxdp}$, nous aurons $b4 = b5$, équation qui, étant combinée avec l'équation $A1$, donnera, après avoir fait pour abréger $\alpha p^2 + \mathrm{C}p + \nu = \mu$ & $\frac{d\alpha}{dp}p^2 + \frac{d\mathrm{C}}{dp}\,p +$

$\frac{d\nu}{dp}=\lambda$, $(B\,1)$ ....

$(K+p)\left(\lambda-Qp+\frac{R}{p}\right)-\mu\frac{dK}{dp}=0.$

On tire des deux équations $A\,1$ & $B\,1$,

$$Q=\frac{1}{(K+p)^2}\left(-\alpha K^2+\beta K-\nu+(K+p)\lambda-\mu\frac{dK}{dp}+\frac{dK}{dx}-K\frac{dK}{dy}\right),$$

$$R=\frac{p}{(K+p)^2}\left(p(-\alpha K^2+\beta K-\nu)-\lambda(K^2+Kp)+\mu K\frac{dK}{dp}-p\left(K\frac{dK}{dy}-\frac{dK}{dx}\right)\right);$$

& en mettant ces valeurs dans $a\,1$, $a\,2$ ou dans $a\,1$, $a\,3$, il vient

$$\frac{dA}{dy}:A=(c\,1)\ldots\ldots\frac{1}{(K+p)^2}\left((K+p)\frac{d\mu}{dp}-\mu\left(\frac{dK}{dp}+1\right)+\frac{dK}{dx}-K\frac{dK}{dy}\right),$$

$$\frac{dA}{dx}:A=(c\,2)\ldots\ldots\frac{1}{(K+p)^2}\left((K+p)\left(\mu-p\frac{d\mu}{dp}\right)+\mu p\left(\frac{dK}{dp}+1\right)-p^2\frac{dK}{dy}-(K+2p)\frac{dK}{dx}\right);$$

$$\frac{dA}{dp}:A=(c\,3)\ldots\ldots\frac{-1}{K+p}\,\frac{dK}{dp}.$$

Ces expreſſions ſeroient abſurdes ſi l'on n'avoit $\frac{dc\,1}{dx}=\frac{dc\,2}{dy}$ & $\frac{dc\,1}{dp}=\frac{dc\,3}{dy}$ ou $\frac{dc\,2}{dp}=\frac{dc\,3}{dx}$; ainſi K ſera donné par les deux équations $(C\,1)$ .....

$(K+p)^2\left(\frac{d^2\mu}{dx\,dp}+p\frac{d^2\mu}{dy\,dp}-\frac{d\mu}{dy}\right)-\mu(K+p)$

$$\left(\frac{d^2K}{dxdp}+p\frac{d^2K}{dydp}-\frac{dK}{dy}\right)+(K+p)\left(\frac{d^2K}{dx^2}+\right.$$
$$\left.2p\frac{d^2K}{dxdy}+p^2\frac{d^2K}{dy^2}\right)+\left[2\mu\left(\frac{dK}{dp}+1\right)-\right.$$
$$\left.(K+p)\frac{d\mu}{dp}\right]\left(\frac{dK}{dx}+p\frac{dK}{dy}\right)-(K+p)\left(\frac{dK}{dp}+1\right)$$
$$\left(\frac{d\mu}{dx}+p\frac{d\mu}{dy}\right)-2\left(\frac{dK}{dx}+p\frac{dK}{dy}\right)^2=0,$$
$$(C2)\ldots 2\left[\frac{dK}{dx}\left(\frac{dK}{dp}+1\right)-\frac{dK}{dy}\left(K-p\frac{dK}{dp}\right)\right]$$
$$-(K+p)\left(\frac{d^2K}{dxdp}+p\frac{d^2K}{dydp}\right)-(K+p)^2\frac{d^2\mu}{dp^2}$$
$$+2(K+p)\left(\frac{dK}{dp}+1\right)\frac{d\mu}{dp}+\mu\left[(K+p)\frac{d^2K}{dp^2}\right.$$
$$\left.-2\left(\frac{dK}{dp}+1\right)^2\right]=0.$$

Donc l'équation du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}+\mu=0$ étant proposée, si on nomme A le facteur propre à la rendre intégrable, on aura $\frac{dA}{A}=c\,1\,dy+c\,2\,dx+c\,3\,dp$; & il ne sera plus question que de trouver pour K toute autre valeur que $-p$, qui satisfasse en même-tems aux deux équations $C1$ & $C2$.

Si dans l'équation $C2$ on met A pour μdx^2, α pour K & $\frac{dy}{dx}$ pour p ; on aura l'équation de condition donnée par M. Fontaine, page 41 & 42 de ses Mémoires publiés en 1764. Il ajoute : *Je suppose que α soit donné, & qu'il ne soit point $-\frac{dy}{dx}$, sans quoi il faudroit, par le moyen de l'équation entre α*

& A, *trouver une valeur de* α. Il eſt clair que cela ne ſuffiroit pas, & qu'il faudroit encore que cette valeur de α ſatisfît à une autre équation entre A & α équivalente à l'équation $C1$.

Nous remarquerons auſſi que ſi dans les équations $\frac{dA}{dy}:A=c1$, $\frac{dA}{dx}:A=c2$, $\frac{dA}{dp}:A=c3$, on dégage $\frac{dK}{dx}$, $\frac{dK}{dy}$, $\frac{dK}{dp}$; & qu'ayant fait $\frac{d^2K}{dxdy}=\frac{d^2K}{dydx}$, $\frac{d^2K}{dydp}=\frac{d^2K}{dpdy}$ ou $\frac{d^2K}{dxdp}=\frac{d^2K}{dpdx}$, on mette dans ces deux équations pour $\frac{dK}{dx}$, $\frac{dK}{dy}$, $\frac{dK}{dp}$ leurs valeurs, on aura les équations A & B du n°. 77.

On fera $\frac{db1}{dx}=\frac{db2}{dy}$; & après avoir mis dans cette équation pour $\frac{d^2K}{dy^2}$, $\frac{d^2K}{dxdy}$ leurs valeurs $b1$, $b2$, il viendra

$$(D1)\ldots K\left[\frac{d^2\left(\varsigma-Qp-\frac{R}{p}\right)}{dydx}-\frac{d^2(\alpha+Q)}{dx^2}+\frac{d^2(\gamma+R)}{dy^2}-\frac{d.(\alpha+Q)(\gamma+R)}{dy}\right]+\left[(\alpha+Q)K^2+K\frac{dK}{dy}\right]\frac{d(\alpha+Q)}{dx}+\left(\gamma+R-\frac{dK}{dx}\right)\left[\frac{d\left(\varsigma-Qp-\frac{R}{p}\right)}{dy}-\frac{d(\alpha+Q)}{dx}\right]=0.$$

Mainte-

nant si l'on fait pour abréger $\frac{d\left(\epsilon - Qp - \frac{R}{p}\right)}{dy} - 2\frac{d(\alpha+Q)}{dx} = \varrho$, $\frac{d^2\left(\epsilon - Qp - \frac{R}{p}\right)}{dxdy} - \frac{d^2(\alpha+Q)}{dx^2} - \frac{d^2(\gamma+R)}{dy^2} - \frac{d.(\alpha+Q)(\gamma+R)}{dy} + \left(\epsilon - Qp - \frac{R}{p}\right)\frac{d(\alpha+Q)}{dx} = \sigma$, $\frac{\lambda - Qp + \frac{R}{p}}{\mu} = \Sigma$, les équations $A\,1$, $B\,1$ & $D\,1$ donneront

$$\frac{dK}{dy} = \epsilon - Qp - \frac{R}{p} + \frac{\sigma}{\rho} - (\alpha+Q)K,$$
$$\frac{dK}{dx} = \gamma + R + \frac{\sigma}{\rho}K,$$
$$\frac{dK}{dp} = \Sigma(K+p).$$

Ainsi pour déterminer A & K, on aura les deux équations $\frac{dA}{A} = (\alpha+Q)dy - \frac{\sigma}{\rho}dx - \Sigma dp$. $dK + \frac{KdA}{A} = \left(\epsilon - Qp - \frac{R}{p} + \frac{\sigma}{\rho}\right)dy + (\gamma+R)dx + \Sigma p\,dp$; & l'intégrale premiere complette de la proposée sera $Ady + dx\left(c + \int A\left(\left(\epsilon - Qp - \frac{R}{p} + \frac{\sigma}{\rho}\right)dy + (\gamma+R)dx + \Sigma p\,dp\right)\right) = 0$, A étant égal à $e^{\int((\alpha+Q)dy - \frac{\sigma}{\varrho}dx - \Sigma dp)}$.

Cela suppose que $(\alpha+Q)dy - \frac{\sigma}{\rho}dx - \Sigma dp$

& $A\left(\left(\mathsf{c}-Qp-\frac{R}{p}+\frac{\sigma}{\rho}\right)dy+(\upsilon+R)dx+\right.$ $\Sigma p\,dp)$ soient des différentielles exactes, & qu'on ait par conséquent les quatre équations de condition

$$(F1)\ldots\ldots\frac{d(\alpha+Q)}{dx}+\frac{d(\sigma:\rho)}{dy}=0,$$

$$(F2)\ldots\ldots\frac{d(\alpha+Q)}{dp}+\frac{d\Sigma}{dy}=0,$$

$$(F3)\ldots\ldots\frac{d\left(\mathsf{c}-Qp-\frac{R}{p}+\frac{\sigma}{\rho}\right)}{dx}-\frac{d(\upsilon+R)}{dy}$$

$$-\frac{\sigma}{\rho}\left(\mathsf{c}-Qp-\frac{R}{p}+\frac{\sigma}{\rho}\right)-(\alpha+q)(\upsilon+R)=0,$$

$$(F4)\ldots\ldots\frac{d(\upsilon+R)}{dp}-p\frac{d\Sigma}{dx}-\Sigma\left(\upsilon+R-\right.$$

$$\left.p\frac{\sigma}{\rho}\right)=0.$$

On cherchera des valeurs de Q & R qui satisfassent à ces équations, & le Problême sera résolu.

Il pourra arriver que le dénominateur de la fraction $\frac{\sigma}{\rho}$ soit $=0$; mais en donnant à l'équation $D1$ la forme suivante $K\left[\frac{d^2\left(\mathsf{c}-Qp-\frac{R}{p}\right)}{dx\,dy}-\right.$

$$\left.\frac{d^2(\alpha+Q)}{dx^2}+\frac{d^2(\upsilon+R)}{dy^2}-\frac{d.(\alpha+Q)(\upsilon+R)}{dy}\right]$$

$$+\left[(\alpha+Q)K^2+\upsilon+R+K\frac{dK}{dy}-\frac{dK}{dx}\right]\frac{d(\alpha+Q)}{dx}$$

$$+\left(\upsilon+R-\frac{dK}{dx}\right)\left[\frac{d\left(\mathsf{c}-Qp-\frac{R}{p}\right)}{dy}-\right.$$

$2\frac{d(\alpha+Q)}{dx}\Big] = 0$, on voit qu'alors σ sera $=0$, & que par conséquent la fraction $\frac{\sigma}{\rho}$ deviendra $\frac{0}{0}$; voici comment on la déterminera. On fera $\frac{\epsilon - Qp - \frac{R}{p}}{2} + \frac{\sigma}{\rho} = \Psi$, & en substituant pour $\frac{\sigma}{\rho}$ sa valeur dans l'équation $F\,1$, on trouvera $\frac{d\Psi}{dy} =$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\left(\epsilon - Qp - \frac{R}{p}\right)}{dy} - 2\frac{d(\alpha+Q)}{dx}\right) = 0,$$

c'est-à-dire que Ψ ne doit point renfermer y. Après avoir fait la même substitution dans l'équation $F3$, on aura pour déterminer Ψ l'équation

$$(G\,1)\ldots\ldots \frac{d\Psi}{dx} - \Psi^2 = (\alpha+Q)(\nu+R) - \tfrac{1}{4}\left(\epsilon - Qp - \frac{R}{p}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\left(\epsilon - Qp - \frac{R}{p}\right)}{dx} - 2\frac{d(\nu+R)}{dy}\right),$$

dont le second membre ne renfermera pas $d'y$, puisqu'étant différentié par rapport à cette variable il est $=\sigma$ ou $=0$. Enfin dans ce cas-ci l'intégrale premiere complette de la proposée sera

$$A\,dy + dx\left(c + \int A\left(\left(\frac{\epsilon - Qp - \frac{R}{p}}{2} + \Psi\right)dy + (\nu+R)\,dx + \Sigma p\,dp\right)\right) = 0,$$

A étant égal à

$$\int_e ((\alpha + Q)dy + \left(\frac{\varsigma - Qp - \frac{R}{p}}{2} - \psi\right)dx - \Sigma dp);$$

& il ne s'agira plus que de trouver pour Q & *R* des valeurs qui satisfassent aux quatre équations $\varsigma = 0$, $\sigma = 0$, $F2 = 0$, $F4 = 0$.

80. *A* étant toujours un des facteurs propres à rendre intégrable l'équation différentielle $dp + \mu dx = 0$, si l'on fait $A dp + A\mu dx = du$, $u = a$ sera une des deux intégrales premieres complettes de cette équation du second ordre; & tout facteur qui sera renfermé dans la formule $A\phi:(u)$, ne pourra conduire qu'à cette intégrale premiere. Nommons $A2$ un autre facteur propre à rendre intégrable la même équation du second ordre, & qui ne soit pas compris dans la formule $A\phi:(u)$; en faisant $A2 dp + A2\mu dx = dt$, $t = b$ sera l'autre intégrale premiere; & tout facteur qui sera compris dans la formule $A2 f:(t)$, ne pourra donner que cette intégrale premiere. Mais ψ étant une fonction quelconque de $\int du\phi:(u)$, $\int dt f:(t)$; il est clair que $\left(A\frac{d\psi}{du}\phi:(u) + A2\frac{d\psi}{dt}f:(t)\right)$ $(dp + \mu dx)$ est aussi une différentielle exacte, puisqu'elle est égale à $\frac{d\psi}{du} du\phi:(u) + \frac{d\psi}{dt} dt f:(t)$; donc $A\frac{d\psi}{du}\phi:(u) + A2\frac{d\psi}{dt}f:(t)$ est la formule générale qui renferme tous les facteurs précédens. Si on en trouvoit un qu'elle ne comprît point, il donneroit une intégrale premiere de la proposée qui ne coïncideroit point avec une des deux que nous venons de trouver, & au lieu de deux intégrales premieres complettes de notre équation du second ordre, on en

auroit trois, ce qui ne peut être; d'où je crois pouvoir conclure que $A\frac{d\Psi}{du}\phi:(u)+A2\frac{d\Psi}{dt}f:(t)$ est la formule générale des facteurs propres à rendre $dp+\mu dx$ une différentielle exacte, & est par conséquent l'expression la plus générale qui puisse satisfaire aux deux équations A & B du n°. 77. Ces propositions seront éclaircies par les exemples suivans.

Soit d'abord l'équation du second ordre $dp+\frac{pdx}{x}=0$, dont un des facteurs A est égal à x & donne $u=px$. De $u=px$, on tire $\frac{dy}{u}=\frac{dx}{x}$ & $\frac{y}{u}+\int\frac{ydu}{u^2}=\log.x$; donc $\int\frac{y}{p^2x}\left(dp+\frac{pdx}{x}\right)=\log.x-\frac{y}{px}$, & il est clair que le facteur $\frac{y}{p^2x}$ n'étant pas compris dans la formule $x\phi:(px)$, on peut prendre $\log.x-\frac{y}{px}=b$ pour l'autre intégrale premiere complette de la proposée. La premiere est $px=a$; avec les deux on trouve pour intégrale complette finie $y=a(\log.x-b)$. De la même équation $u=px$, on tire aussi $dy=\frac{udx}{x}$ & $y=u\log.x-\int du\log.x$; donc $\int x\log.x\left(dp+\frac{pdx}{x}\right)=px\log.x-y$, & ce nouveau facteur $x\log.x$ qui n'est compris ni dans $x\phi:(px)$, ni dans $\frac{y}{p^2x}$ $f:\left(\log.x-\frac{y}{px}\right)$, l'est dans la formule plus gé-

nérale $x\frac{d\Psi}{du}\phi:(u)+\frac{y}{p^2x}\frac{d\Psi}{dt}f:(t)$, où $u=px$ & $t=\log. x-\frac{y}{px}$; car en faifant $\Psi=ut$, en forte que $\phi:(u)=1$, $f:(t)=1$, $\frac{d\Psi}{du}=t$, $\frac{d\Psi}{dt}=u$, cette formule générale deviendra $x\log. x-\frac{y}{p}+\frac{y}{p}=x\log. x$. Voici un autre exemple tiré de la Géométrie.

On demande la courbe dont la propriété eft, que le rayon de courbure à un point quelconque foit un multiple de la droite tirée de ce point à l'origine des abfciffes. Si l'on fuppofe que les co-ordonnées x & y foient perpendiculaires entr'elles, l'équation qui réfoudra le Problême fera (n°. 20) $\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{ndx}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$. Le fecond membre devient intégrable étant multiplié par $x+py=\frac{xdx+ydy}{dx}$, & fon intégrale eft $n\sqrt{(x^2+y^2)}$; je multiplie le premier par le même facteur, & j'ai à intégrer la différentielle $\frac{(x+py)dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$. Pour cela je fais $y=px+u$, pour que $du=-xdp$, & que la différentielle précédente devienne $\frac{updp-(1+p^2)du}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$, qui a évidemment pour intégrale $\frac{-u}{\sqrt{(1+p^2)}}=\frac{px-y}{\sqrt{(1+p^2)}}$. Ainfi l'équation du premier ordre $\frac{px-y}{\sqrt{(1+p^2)}}=a+n\sqrt{(x^2+y^2)}$

eſt une des intégrales premieres complettes de la propoſée, il s'agit maintenant de trouver l'autre. Je ferai $y = xz$; &, à cauſe de $dy = pdx$, j'aurai $pdx = xdz + zdx$, d'où je tirerai $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{p-z}$. Cette valeur étant ſubſtituée dans la propoſée, elle deviendra $\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ndz}{(p-z)\sqrt{(1+z^2)}} = 0$. C'eſt pourquoi ſi l'on fait encore $z = \frac{p+z'}{1-pz'}$, d'où l'on tire $p - z = -z' \cdot \frac{p^2+1}{1-pz'}$, $\sqrt{(1+z^2)} = \frac{\sqrt{[(1+p^2)(1+z'^2)]}}{1-pz'}$, $dz = \frac{(1+z'^2)dp+(1+p^2)dz'}{(1-pz')^2}$; ſi, dis-je, l'on fait ces ſubſtitutions dans la derniere différentielle, on la transformera en celle-ci, $\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{n(1+z'^2)dp+n(1+p^2)dz'}{z'\sqrt{(1+z'^2)}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$ qui n'eſt autre que $\frac{z'+n\sqrt{(1+z'^2)}}{z'\sqrt{(1+p^2)}}\left[\frac{dp}{1+p^2} + \frac{ndz'}{[z'+n\sqrt{(1+z'^2)}]\sqrt{(1+z'^2)}}\right]$; & on verra clairement que $\frac{z'\sqrt{(1+p^2)}}{z'+n\sqrt{(1+z'^2)}}$ eſt l'autre facteur demandé, auquel répond l'intégrale premiere complette $\int\frac{dp}{1+p^2} + \int\frac{ndz'}{[z'+n\sqrt{(1+z'^2)}]\sqrt{(1+z'^2)}} = b$. On en tirera z' en p ou p en z'; &, à cauſe de $\frac{y}{x} = z = \frac{p+z'}{1-pz'}$, on aura $y = x\frac{p+z'}{1-pz'}$. On mettra cette valeur de y dans l'intégrale premiere

complette trouvée précédemment, & on aura $x = \frac{1 - a(1 - pz')}{[z' + n\sqrt{(1+z'^2)}]\sqrt{(1+p^2)}}$; on aura aussi $y = \frac{-a(p+z')}{[z' + n\sqrt{(1+z'^2)}]\sqrt{(1+p^2)}}$. Ainsi x & y seront donnés en fonction de l'une de ces deux quantités z' ou p, & le Problême sera résolu. Dans l'article 72 nous avons traité cette même équation d'une autre maniere.

B étant une fonction de x, y, p, la différentielle dB a pour facteur l'unité, c'est-à-dire qu'on peut prendre $A = 1$; cela posé, on demande de trouver $A2$. Il seroit important de pouvoir résoudre ce Problême généralement; car $B = a$ peut représenter toute équation différentielle du premier ordre; & en la regardant comme une des deux intégrales premieres complettes de l'équation du second ordre $dB = 0$, s'il étoit possible de trouver l'autre au moyen du facteur $A2$, on auroit entre x, y, p deux équations, & en éliminant p l'intégrale finie complette de l'équation du premier ordre $B = a$.

Supposons que la fonction B ne renferme point y, & que de plus elle soit telle qu'en faisant $p = x^\lambda z$, elle devienne $x^\mu Z$, où Z est une fonction de z seulement. Nous aurons $Z = \frac{B}{x^\mu}$, ou, supposant $x^\mu = \frac{B}{\sigma}$, $Z = \sigma$; il pourroit arriver que de cette derniere équation on ne pût pas tirer la valeur de z par les méthodes connues; nous n'en dirons pas moins que z est une fonction de σ que nous représenterons par Σ, & nous aurons $z = \Sigma$, $p = \Sigma x^\lambda$, $dy = \Sigma x^\lambda dx$. Mais $x = \left(\frac{B}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\mu}}$, $dx = \frac{1}{\mu}\left(\frac{B}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\mu} - 1} \times$

$\frac{\sigma dB - B d\sigma}{\sigma^2}$, & $x^\lambda dx = \frac{1}{\mu}\left(\frac{B^{\frac{\lambda+1}{\mu}-1} dB}{\sigma^{\frac{\lambda+1}{\mu}}} - \frac{B^{\frac{\lambda+1}{\mu}} d\sigma}{\sigma^{\frac{\lambda+1}{\mu}+1}}\right)$; donc $\frac{\mu dy}{B^{\frac{\lambda+1}{\mu}}} = \frac{\Sigma dB}{B\sigma^{\frac{\lambda+1}{\mu}}} - \frac{\Sigma d\sigma}{\sigma^{\frac{\lambda+1}{\mu}+1}}$. Je mettrai dans le premier terme du second membre pour σ & Σ leurs valeurs $\frac{B}{x^\mu}$ & $\frac{p}{x^\lambda}$, & il deviendra $\frac{xpdB}{B^{\frac{\lambda+1}{\mu}+1}}$; puis en intégrant toute l'équation, j'aurai $\frac{\mu y}{B^{\frac{\lambda+1}{\mu}}} + \int\frac{(\lambda+1).ydB}{B^{\frac{\lambda+1}{\mu}+1}} = \int\frac{xpdB}{B^{\frac{\lambda+1}{\mu}+1}} - \int\frac{\Sigma d\sigma}{\sigma^{\frac{\lambda+1}{\mu}+1}}$; d'où je tirerai facilement $\int\frac{xp-(\lambda+1)y}{B^{\frac{\lambda+1}{\mu}+1}} dB = \frac{\mu y}{B^{\frac{\lambda+1}{\mu}}} + \int\frac{\Sigma d\sigma}{\sigma^{\frac{\lambda+1}{\mu}+1}}$, & que par conséquent dans ce cas-ci le facteur demandé est $\frac{xp-(\lambda+1)y}{B^{\frac{\lambda+1}{\mu}+1}}$.

Au lieu de suppofer que la fonction B ne renferme point y, nous suppoferons qu'elle ne renferme point

x, & que de plus elle soit telle qu'en faisant $p = y^\lambda z$, elle devienne $y^\mu Z$, où Z est une fonction de z seulement. Nous aurons $Z = \frac{B}{y^\mu}$; ou, supposant $y^\mu = \frac{B}{\sigma}$, $Z = \sigma$, & regardant cette derniere équation comme résolue, nous aurons $z = \Sigma$, Σ étant une fonction de σ, $p = \Sigma y^\lambda$, $dy = \Sigma y^\lambda dx$, & $dx = \frac{dy}{\Sigma y^\lambda}$: Mais $y = \left(\frac{B}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\mu}}$, $dy = \frac{1}{\mu}\left(\frac{B^{\frac{1}{\mu}-1} dB}{\sigma^{\frac{1}{\mu}}} - \frac{B^{\frac{1}{\mu}} d\sigma}{\sigma^{\frac{1}{\mu}+1}}\right)$; donc $\mu B^{\frac{\lambda-1}{\mu}} dx = \frac{dB}{B\Sigma\sigma^{\frac{1-\lambda}{\mu}}} - \frac{d\sigma}{\Sigma\sigma^{\frac{1-\lambda}{\mu}+1}}$. Je mettrai dans le premier terme du second membre pour σ & Σ leurs valeurs $\frac{B}{y^\mu}$ & $\frac{p}{y^\lambda}$; & il deviendra $\frac{y dB}{pB^{\frac{1-\lambda}{\mu}+1}}$; puis en intégrant toute l'équation, j'aurai $\mu x B^{\frac{\lambda-1}{\mu}} - \int(\lambda - 1)x B^{\frac{\lambda-1}{\mu}-1} dB = \int\frac{y dB}{pB^{\frac{1-\lambda}{\mu}+1}} - \int\frac{d\sigma}{\Sigma\sigma^{\frac{1-\lambda}{\mu}+1}}$; d'où je tirerai facilement $\int B^{\frac{\lambda-1}{\mu}-1}\left((\lambda - 1)x + \frac{y}{p}\right) dB =$

$\mu x B^{\frac{\lambda-1}{\mu}} + {}'\int \frac{\sigma^{\frac{\lambda-1}{\mu}-1} d\sigma}{\Sigma}$; donc dans le cas présent le facteur demandé est $B^{\frac{\lambda-1}{\mu}-1}\left((\lambda-1)x+\frac{y}{p}\right)$.

La différentielle dB ayant pour facteur $\frac{xp-(\lambda+1)y}{B^{\frac{\lambda+1}{\mu}+1}}$ dans le premier cas, & $B^{\frac{\lambda-1}{\mu}-1}$ $\left((\lambda-1)x+\frac{y}{p}\right)$ dans le second, il est clair que $xp-(\lambda+1)y$ & $(\lambda-1)x+\frac{y}{p}$ sont facteurs l'un de $\frac{dB}{B^{\frac{\lambda+1}{\mu}+1}}$, l'autre de $B^{\frac{\lambda-1}{\mu}-1}dB$, qui sont aussi des différentielles exactes. Ces deux facteurs sont si remarquables par leur simplicité, que nous nous proposerons les deux Problêmes suivans.

1°. Trouver toutes les différentielles exactes du second ordre qui ont pour facteur $px+\lambda y$, λ étant un nombre quelconque. Nous représenterons par dB ces différentielles exactes, & nous aurons $(px+\lambda y)dB$ qui sera aussi une différentielle exacte. Mais $\int(px+\lambda y)\,dB = B(px+\lambda y) - \int B\,d(px+\lambda y)$; donc si $px+\lambda y$ est facteur de dB, réciproquement B est facteur de $d(px+\lambda y) = (\lambda+1)p\,dx + x\,dp$. En considérant cette derniere différentielle, je vois que si je prens $A=1$, & par conséquent $u=px+\lambda y$, je pourrai faire $Az=x^\lambda$, d'où je tirerai $t=px^{\lambda+1}$. Alors si je nomme ψ une fonction quelconque de $\int d(px+\lambda y)\,\varphi:(px+\lambda y)$, $\int d.px^{\lambda+1}f:(px^{\lambda+1})$,

j'aurai

j'aurai $\frac{d\Psi}{du}\phi:(u)+x^\lambda\frac{d\Psi}{dt}f:(t)$, où $u=px+\lambda y$ & $t=px^{\lambda+1}$, pour la formule qui renferme tous les facteurs de $d(px+\lambda y)$; il est clair que cette formule est aussi celle de toutes les fonctions de x, y, p dont les différentielles premieres auroient pour facteur $px+\lambda y$.

2°. Trouver toutes les différentielles exactes du second ordre qui ont pour facteur $\lambda x+\frac{y}{p}$, λ étant un nombre quelconque. Dans ce cas-ci on aura $\left(\lambda x+\frac{y}{p}\right)dB$ qui sera une différentielle exacte; &, à cause de $\int\left(\lambda x+\frac{y}{p}\right)dB=B\left(\lambda x+\frac{y}{p}\right)-\int Bd\left(\lambda x+\frac{y}{p}\right)$, on verra que B doit être facteur de $d\left(\lambda x+\frac{y}{p}\right)=(\lambda+1)\frac{dy}{p}-\frac{ydp}{p^2}$. En considérant cette derniere différentielle, je vois que si je prens $A=1$, & par conséquent $u=\lambda x+\frac{y}{p}$, je pourrai faire $A2=y^\lambda$, d'où je tirerai $t=\frac{y^{\lambda+1}}{p}$. Alors Ψ étant une fonction quelconque de $\int d\left(\lambda x+\frac{y}{p}\right)\phi:\left(\lambda x+\frac{y}{p}\right), \int d.\frac{y^{\lambda+1}}{p}f:\left(\frac{y^{\lambda+1}}{p}\right)$, j'aurai $\frac{d\Psi}{du}\phi:(u)+y^\lambda\frac{d\Psi}{dt}\phi:(t)$, où $u=\lambda x+\frac{y}{p}$ & $t=\frac{y^{\lambda+1}}{p}$, pour la formule qui renferme tous

les facteurs de $d\left(\lambda x+\frac{y}{p}\right)$; il est visible que cette formule est aussi celle de toutes les fonctions de x, y, p dont les différentielles premieres auroient pour facteur $\lambda x+\frac{y}{p}$. Je passe aux équations différentielles des ordres supérieurs.

81. L'équation du troisiéme ordre $dq+\mu dx=0$, où μ est fonction de $x, y, \frac{dy}{dx}=p, \frac{dp}{dx}=q$, étant proposée, on la multipliera par un facteur A fonction de x, y, p, q, & on aura la différentielle exacte $Adq+A\mu dx$ qui deviendra $(Ar+A\mu)dx$, si l'on fait $\frac{dq}{dx}=r$. On comparera cette différentielle exacte à celle-ci $\mathrm{C}dx$ du n°. 33, d'où l'on tirera $N=\frac{dA}{dy}r+\frac{d.A\mu}{dy}, P=\frac{dA}{dp}r+\frac{d.A\mu}{dp}, Q=\frac{dA}{dq}r+\frac{d.A\mu}{dq}, R=A$; en mettant ces valeurs dans $N-\frac{1}{dx}dP+\frac{1}{dx^2}d^2Q-\frac{1}{dx^3}d^3R=0$, cette équation deviendra $\sigma+2r\left(\frac{d\rho}{dx}+p\frac{d\rho}{dy}+q\frac{d\rho}{dp}\right)+\varrho\frac{dr}{dx}+r^2\frac{d\rho}{dq}=0$, dans laquelle $\varrho=\frac{d^2.A\mu}{dq^2}-2\frac{dA}{dp}-\frac{d^2A}{dxdq}-p\frac{d^2A}{dydq}-q\frac{d^2A}{dpdq}$,

$$\sigma = \frac{d.A\mu}{dy} - \frac{d^2.A\mu}{dxdp} - p\frac{d^2.A\mu}{dydp} - q\frac{d^2.A\mu}{dp^2} +$$
$$\frac{d^3.A\mu}{dx^2dq} + 2p\frac{d^3.A\mu}{dxdydq} + 2q\frac{d^3.A\mu}{dxdpdq} + p^2\frac{d^3.A\mu}{dy^2dq}$$
$$+ 2pq\frac{d^3.A\mu}{dydpdq} + q^2\frac{d^3.A\mu}{dp^2dq} + q\frac{d^2.A\mu}{dydq} - q^3\frac{d^3A}{dp^3}$$
$$- 3pq^2\frac{d^3A}{dydp^2} - 3p^2q\frac{d^3A}{dy^2dp} - p^3\frac{d^3A}{dy^3} -$$
$$3p^2\frac{d^3A}{dy^2dx} - 3q^2\frac{d^2A}{dydp} - 3pq\frac{d^2A}{dy^2} - 3q^2\frac{d^3A}{dxdp^2}$$
$$- 6pq\frac{d^3A}{dxdydp} - 3q\frac{d^2A}{dxdy} - 3q\frac{d^3A}{dx^2dp} -$$
$$3p\frac{d^3A}{dx^2dy} - \frac{d^3A}{dx^3}.$$

Maintenant, comme A & μ par l'hypothèſe ne doivent point renfermer r, cette transformée donnera néceſſairement les deux équations $\sigma = 0$ & $\varrho = 0$, puis il faudra trouver pour A une valeur qui ſatisfaſſe en même-temps à ces deux équations.

Cela fait $Adq + A\mu dx$ ſera une différentielle exacte que je repréſenterai par du & $u = a$ ſera une des intégrales premieres complettes de la propoſée. Nommons $A2$ un autre facteur qui ſatisfaſſe aux deux équations σ & ϱ, ſans être compris dans la formule $A\phi : (u)$, & faiſons $A2dq + A2\mu dx = dt$, $t = b$ ſera une des deux autres intégrales premieres complettes de la propoſée. Pour trouver la troiſiéme, nous prendrons un facteur $A3$ qui ſatisfaſſe aux mêmes équations de condition, ſans être compris ni dans la formule $A\phi : (u)$ ni dans celle-ci $A2f : (t)$; & en faiſant $A3dq + A3\mu dx = ds$, nous aurons $s = c$ pour cette troiſiéme intégrale premiere complette de la propoſée. Mais ψ étant une fonction quelconque de

$\int du\phi:(u)$, $\int dtf:(t)$ & $\int dsF:(s)$, cette quantité $\left(A\frac{d\Psi}{du}\phi:(u)+A2\frac{d\Psi}{dt}\phi:(t)+A3\frac{d\Psi}{ds}F:(s)\right)$ $(dq+\mu dx)$ sera aussi une différentielle exacte, puisqu'elle est égale à $\frac{d\Psi}{du}du\phi:(u)+\frac{d\Psi}{dt}dtf:(t)+\frac{d\Psi}{ds}dsF:(s)$; donc $A\frac{d\Psi}{du}\phi:(u)+A2\frac{d\Psi}{dt}f:(t)+A3\frac{d\Psi}{ds}F:(s)$ est la formule générale qui renferme tous les facteurs propres à rendre $dq+\mu dx$ une différentielle exacte, & est par conséquent l'expression la plus générale qui puisse satisfaire aux deux équations σ & ϱ.

Si l'équation étoit du quatriéme ordre, on trouveroit de la même maniere, ou par les autres méthodes que nous avons indiquées, les équations de condition par lesquelles le facteur est donné; & par un raisonnement semblable à celui que nous venons de faire, on parviendroit facilement à trouver la forme générale de ce facteur. Il en seroit de même des ordres supérieurs; la grande difficulté, c'est de pouvoir satisfaire aux équations de condition qui sont aux différences partielles; nous allons, dans le Chapitre suivant, traiter ce genre d'équations avec beaucoup d'étendue.



CHAPITRE X.

De l'intégration des équations aux différences partielles.

82. J'AI donné dans les articles 54 & 55 les principes fondamentaux du Calcul dont il va être question ; j'ai même intégré complettement dans le premier de ces articles l'équation linéaire du premier ordre $M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + Pz + Q = 0$, où M, N, P, Q sont fonctions des deux variables y & x. Maintenant, soit entre les mêmes variables y, x & la fonction z de ces variables une équation non linéaire du même ordre $\frac{dz}{dx} = V$, où V renferme x, y & z. A cause de $dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$, on aura $dz - Vdx = \frac{dz}{dy}dy$; mais si pour un moment on regarde y comme constant, on aura la différentielle $dz - Vdx$ qu'on rendra exacte en la multipliant par un facteur μ qui pourra être fonction des trois quantités x, y & z ; on fera $\mu dz - \mu V dx = dS$, & il sera clair que $S = F:(y)$ est l'intégrale complette de $\frac{dz}{dx} = V$, quel que soit V. Soit la différentielle de S, en faisant varier x, y & z, égale à $\mu dz - \mu V dx + Qdy$; on trouvera Q par la méthode du n°. 52, il doit être

pris de la même maniere que S; c'est-à-dire que si S est pris de maniere qu'il s'évanouisse lorsque $x=a$ & $z=c$, Q devra s'évanouir dans la même hypothèse. Mais cette différentielle de S est aussi égale à $dyF':(y)$; donc $dz=Vdx+\frac{F':(y)-Q}{\mu}dy$, & par conséquent $\frac{dz}{dy}=\frac{F':(y)-Q}{\mu}$. Ces propositions seront éclaircies par les exemples suivans.

On propose d'intégrer l'équation $\frac{dz}{dx}=\frac{y}{x+z}$; On cherchera d'abord le facteur propre à rendre intégrable la différentielle $dz-\frac{ydx}{x+z}$, où y est regardé comme constant. Mais cette différentielle n'est autre que $\frac{-y}{x+z}\left(dx-\frac{xdz}{y}-\frac{zdz}{y}\right)$, & il est clair que $dx-\frac{xdz}{y}-\frac{zdz}{y}$ a pour facteur $e^{-\frac{z}{y}}$, donc le facteur demandé est $-\frac{x+z}{y}e^{-\frac{z}{y}}$. Ainsi $dS=-\frac{x+z}{y}e^{-\frac{z}{y}}dz+e^{-\frac{z}{y}}dx$; d'où l'on tire $S=e^{-\frac{z}{y}}(y+x+z)$, & $e^{-\frac{z}{y}}(y+x+z)=F:(y)$ pour l'intégrale complette de $\frac{dz}{dx}=\frac{y}{x+z}$.

La valeur totale de S est $e^{-\frac{z}{y}}(y+x+z)+C$, ou bien $e^{-\frac{z}{y}}(y+x+z)-e^{-\frac{c}{y}}(y+a+c)$, si elle doit être prise de maniere qu'elle s'évanouisse lorsque $x=a$ & $z=c$; or $Q=\frac{dS}{dy}=e^{-\frac{z}{y}}\left(1+\frac{z}{y}+\right.$

$\frac{xz}{y^2} + \frac{z^2}{y^2}\Big) - e^{-\frac{c}{y}}\Big(1 + \frac{c}{y} + \frac{ac}{y^2} + \frac{c^2}{y^2}\Big)$; donc Q s'évanouira aussi lorsqu'on fera $x = a$ & $z = c$.

Je prendrai pour second exemple l'équation $\frac{dz}{dx} = \frac{y^2 + z^2}{y^2 + x^2}$. Il est clair que le facteur de $dz - \frac{y^2 + z^2}{y^2 + x^2} dx$, où y est regardé comme constant, est $\frac{y}{y^2 + z^2}$; donc $dS = \frac{y\,dz}{y^2 + z^2} - \frac{y\,dx}{y^2 + x^2}$; & on a par conséquent pour l'intégrale complette demandée cette équation $A\ \text{tang.}\ \frac{yz - xy}{y^2 + xz} = F:(y)$. Si la valeur de S doit s'évanouir lorsque $x = a$ & $z = c$, elle est $A\ \text{tang.}\ \frac{yz - xy}{y^2 + xz} - A\ \text{tang.}\ \frac{cy - ay}{y^2 + ac}$; or $Q = \frac{dS}{dy} = -\frac{z}{y^2 + z^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{c}{y^2 + c^2} - \frac{a}{y^2 + a^2}$; donc cette quantité s'évanouira aussi lorsqu'on fera $x = a$ & $z = c$.

Si on eut proposé l'équation $\frac{dz}{dy} = V$, on auroit cherché le facteur de $dz - V\,dy$, en regardant x comme constant; de cette maniere on feroit parvenu à une différentielle exacte, dont l'intégrale égalée à une fonction arbitraire de x, auroit été l'intégrale complette demandée.

De l'équation $dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy$, on tire $z = x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} - \int \left(x\, d \frac{dz}{dx} + y\, d \frac{dz}{dy} \right)$; cette transformation peut être de quelqu'ufage dans l'intégration des équations aux différences partielles, nous en allons donner plufieurs exemples.

Si on propofe celle-ci $\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dz}{dx} = 1$; en faifant $\frac{dz}{dx} = p$, on en tirera $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{p}$, & par la transformation précédente, $z = px + \frac{y}{p} - \int \left(x - \frac{y}{p^2} \right) dp$. Cette expreffion feroit abfurde, fi le coefficient de dp fous le figne intégral n'étoit fonction de p feul ; en conféquence on fera $x - \frac{y}{p^2} = F' : (p)$, pour que $\int \left(x - \frac{y}{p^2} \right) dp = F : (p)$; & l'intégrale complette demandée fera donnée par les deux équations $x = \frac{y}{p^2} + F' : (p)$, $z = \frac{2y}{p} + pF'(p) - F : (p)$. Pour avoir une des intégrales particulieres, on fera $F : (p) = ap - \frac{b}{p}$, & on aura $F' : (p) = a + \frac{b}{p^2}$. Ces valeurs étant fubftituées dans les deux équations précédentes, elles deviendront $x = a + \frac{b+y}{p^2}$, $z = \frac{2(b+y)}{p}$; d'où l'on tirera $p =$

$\frac{z}{2(y+b)}$, $p^2 = \frac{x-a}{y+b}$; & par conséquent $z = 2\sqrt{[(x-a)(y+b)]}$, qui est l'intégrale particuliere demandée. Celle-ci $z=2\sqrt{(xy)}$, qu'on auroit trouvée en faisant $F:(p)=0$, est évidemment renfermée dans la précédente.

Cette autre équation $\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 1$ ne sera pas plus difficile à intégrer ; car on en tirera $\frac{dz}{dy} = \sqrt{(1-p^2)}$, & par notre transformation, $z = px + y\sqrt{(1-p^2)} - \int\left(x - \frac{py}{\sqrt{(1-p^2)}}\right)dp$. En prenant $F':(p)$ pour la fonction de p à laquelle le coefficient de dp doit être égal, on aura l'intégrale complette donnée par les deux équations $x = \frac{py}{\sqrt{(1-p^2)}} + F':(p)$, $z = \frac{y}{\sqrt{(1-p^2)}} + pF':(p) - F:(p)$. On en trouvera bien simplement une intégrale particuliere en faisant $F:(p)=0$; alors $x = \frac{py}{\sqrt{(1-p^2)}}$, $z = \frac{y}{\sqrt{(1-p^2)}}$; d'où l'on tirera $p = \frac{x}{z}$, & $z = \sqrt{(x^2+y^2)}$.

Soit $\frac{dz}{dx} = p$ & $\frac{dz}{dy} = q$; la formule générale deviendra $z = px + qy - \int(x\,dp + y\,dq)$. Cela posé, une équation entre p, q & une des deux variables x ou y, x par exemple, étant proposée ; on cherchera x en fonction de p, q ; & ayant intégré $x\,dp$ par rapport à p seulement, si l'intégrale est V, celle de la différentielle $x\,dp + y\,dq$ qui nécessairement sera exacte, ne pourra être que de la forme $V + F:(q)$.

On aura donc $x\,dp + y\,dq = dV + dq\,F':(q)$, d'où l'on tirera, en repréſentant par $x\,dp + S\,dq$ la différentielle de V priſe en faiſant varier p & q, $y = S + F':(q)$, & par conſéquent $z = px + Sq + qF':(q) - F:(q) - V$; on voit que S eſt comme V une fonction donnée de p & q.

Si l'on propoſoit $q = Px + \Pi$, où P & Π ne ſont fonctions que de la ſeule variable p; on en tireroit $x = \frac{q - \Pi}{P}$, & par conſéquent $V = q\int\frac{dp}{P} - \int\frac{\Pi\,dp}{P}$, $S = \int\frac{dp}{P}$. Donc l'intégrale demandée feroit donnée par les deux équations $y = \int\frac{dp}{P} + F':(q)$, $z = \frac{p(q - \Pi)}{P} + \int\frac{\Pi\,dp}{P} + qF':(q) - F:(q)$. On peut réſoudre ce Problême d'une autre maniere; car de $dz = p\,dx + (Px + \Pi)\,dy$, on tire $z = px + \int(Pxdy + \Pi dy - xdp)$; en faiſant enſuite $Px + \Pi = u$, d'où l'on tire $x = \frac{u - \Pi}{P}$, on a $z = px + \int\frac{\Pi\,dp}{P} + \int u\left(dy - \frac{dp}{P}\right)$. Il eſt clair maintenant que u & $\int u\left(dy - \frac{dp}{P}\right)$ doivent être fonctions de $y - \int\frac{dp}{P}$; & que ſi l'on fait $\int u\left(dy - \frac{dp}{P}\right) = f:\left(y - \int\frac{dp}{P}\right)$, on doit avoir u ou $Px + \Pi = f':\left(y - \int\frac{dp}{P}\right)$. Donc de cette maniere l'intégrale complette ſera donnée par les deux équations $x = -\frac{\Pi}{P} + \frac{1}{P}f':\left(y - \int\frac{dp}{P}\right)$ & $z = \int\frac{\Pi\,dp}{P}$

$-\frac{p\Pi}{P}+\frac{p}{P}f':\left(y-\int\frac{dp}{P}\right)+f:\left(y-\int\frac{dp}{P}\right)$; il ne sera pas inutile de comparer ces deux résultats en apparence si différens. On tire du premier $y-\int\frac{dp}{P}=F':(q)$, & réciproquement $q=f':\left(y-\int\frac{dp}{P}\right)$; donc $x=-\frac{\Pi}{P}+\frac{1}{P}f':\left(y-\int\frac{dp}{P}\right)$. Puisque $F':(q)=y-\int\frac{dp}{P}$ & que $dq=d\left(y-\int\frac{dp}{P}\right)f'':\left(y-\int\frac{dp}{P}\right)$; on aura $dqF':(q)=\left(y-\int\frac{dp}{P}\right)d\left(y-\int\frac{dp}{P}\right)f'':\left(y-\int\frac{dp}{P}\right)$, & $F:(q)=\left(y-\int\frac{dp}{P}\right)f':\left(y-\int\frac{dp}{P}\right)-f:\left(y-\int\frac{dp}{P}\right)$. En mettant pour q, $F:(q)$ & $F':(q)$ leurs valeurs dans $z=\frac{p(q-\Pi)}{P}+\int\frac{\Pi dp}{P}+qF':(q)-F:(q)$, on trouvera $z=\int\frac{\Pi dp}{P}-\frac{p\Pi}{P}+\frac{p}{P}f':\left(y-\int\frac{dp}{P}\right)+f:\left(y-\int\frac{dp}{P}\right)$.

Si l'équation proposée étoit telle qu'on eût z égal à une fonction donnée de p & q; de l'équation $dz=pdx+qdy$, on tireroit $dy=\frac{dz}{q}-rdx$, en faisant pour abréger $\frac{p}{q}=r$; puis $y=\frac{z}{q}-rx+\int\left(\frac{zdq}{q^2}+xdr\right)$. Ayant intégré $\frac{zdq}{q^2}$, où z n'est fonction que de q & r, par rapport à q seulement,

si l'intégrale est V, celle de $\frac{z\,dq}{q^2} + x\,dr$, qui nécessairement est une différentielle exacte, ne pourra être que de la forme $V + F:(r)$. On aura donc $\frac{z\,dq}{q^2} + x\,dr = dV + drF'(r)$; d'où l'on tirera, en représentant par $\frac{z\,dq}{q^2} + S\,dr$ la différentielle de V prise en faisant varier q & r, $x = S + F':(r)$, & par conséquent $y = \frac{z}{q} + V - rS - rF':(r) + F:(r)$.

Soit $z = apq = aq^2 r$; il faudra d'abord intégrer $ar\,dq$ en regardant q seul comme variable, & on aura $V = arq$, $S = aq$. Donc dans ce cas ci $x = aq + F':(r)$, $y = aq - rF':(r) + F:(r)$. Mais on peut conclure de la premiere de ces équations $r = f':(x - aq)$, $dr = (dx - a\,dq)f'':(x - aq)$; donc, à cause de $drF':(r) = (x - aq)\ (dx - a\,dq).f'':(x - aq)$, d'où l'on tire $F:(r) = (x - aq)f':(x - aq) - f:(x - aq)$, $F:(r) - rF':(r) = -f:(x - aq)$; on aura aussi $y = aqf':(x - aq) - f:(x - aq)$, $z = aq^2 f'(x - aq)$. On peut parvenir bien simplement à ce dernier résultat, car de $dy = \frac{dz}{q} - \frac{z\,dx}{aq^2}$, on tire $y = \frac{z}{q} - \int\left(-\frac{z\,dq}{q^2} + \frac{z\,dx}{aq^2}\right)$, & que $\frac{z}{q^2}$ ne peut être fonction que de $-q + \frac{x}{a}$. Il suit de-là qu'on peut supposer $z = aq^2 f':(x - aq)$, ce qui donne $y = aqf':(x - aq) - f:(x - aq)$.

L'équation $q = Vx + U$, où V & U sont fonc-

tions de p & y, étant propofée; on fera ufage de la formule $z = px + \int(q\,dy - x\,dp)$ qui devient alors $z = px + \int(Vx\,dy + U\,dy - x\,dp)$. On fuppofera $x(V\,dy - dp) + U\,dy = d\sigma$; & μ étant le facteur de $V\,dy - dp$, fi $\mu V\,dy - \mu\,dp = dS$, on aura $d\sigma = \frac{x}{\mu}\,dS + U\,dy$. Ayant mis dans U pour p fa valeur en y & S, fi l'intégrale de $U\,dy$, prife par rapport à y feul, eft T; on aura $\sigma = T + F:(S)$, & par conféquent $\frac{x}{\mu} = \frac{dT}{dS} + F':(S)$. Ainfi l'intégrale demandée fera donnée par les deux équations $x = \mu\frac{dT}{dS} + \mu F':(S)$, $z = T + \mu p\frac{dT}{dS} + F:(S) + \mu p F':(S)$.

U & V étant des fonctions de q & x, fi on eut propofé $p = Vy + U$, on auroit fait ufage de la formule $z = qy + \int(p\,dx - y\,dq)$ qui feroit devenue $z = qy + \int(Vy\,dx + U\,dx - y\,dq)$; & ayant fait $y(V\,dx - dq) + U\,dx = d\sigma$, $\mu V\,dx - \mu\,dq = dS$, on auroit trouvé $d\sigma = \frac{y}{\mu}dS + U\,dx$, & par conféquent $\sigma = T + F:(S)$, où T feroit l'intégrale de $U\,dx$, prife en ne faifant varier que x, après avoir mis dans U pour q fa valeur en x & S. L'intégrale complette auroit été donnée par les deux équations $y = \mu\frac{dT}{dS} + \mu F'(S)$, $z = q\mu\frac{dT}{dS} + q\mu F':(S) + T + F:(S)$.

On pourra propofer $y = Vx + U$, V & U étant des fonctions de p & q. Alors on fera ufage de la formule $z = px + qy - \int(x\,dp + y\,dq)$ qui deviendra $z = px + q(Vx + U) - \int(x\,dp + Vx\,dq +$

Udq. Soit $x(dp+Vdq)+Udq=d\sigma$ & $\mu dp+\mu Vdq=dS$; on aura $d\sigma=\frac{x}{\mu}dS+Udq$ & $\sigma=T+F:(S)$, T étant l'intégrale de Udq prife en ne faifant varier que q après avoir mis dans U pour p fa valeur en S & q. Dans ce cas-ci l'intégrale complette fera donnée par les deux équations $x=\mu\frac{dT}{dS}+\mu F':(S)$, $z=\mu(p+qV)\left(\frac{dT}{dS}+F':(S)\right)-T+qU-F:(S)$.

Je fuppofe qu'on ait $P=Q$, P & Q étant deux fonctions, l'une de p & x, l'autre de q & y. Pour réfoudre cette équation, nous introduirons une nouvelle indéterminée u que nous fuppoferons égale à chacune des fonctions P & Q; nous aurons de cette maniere deux équations defquelles nous pourrons tirer p en x & u, & q en y & u. Mais $dz=pdx+qdy$; fi nous intégrons les différentielles pdx & qdy (dont la premiere ne renferme que x & u, & l'autre que y & u), en regardant u comme conftant, que nous nommions les intégrales trouvées R & S, & que nous faffions enfuite $dR=pdx+Vdu$, $dS=qdy+Udu$; nous aurons $dz=dR+dS-(V+U)du$, expreffion qui feroit abfurde fi $V+U$ n'étoit fonction de u feul. Le Problême fera donc réfolu par les deux équations $V+U=F':(u)$ & $z=R+S-F:(u)$.

Nous prendrons pour exemple l'équation $a^4pq=x^2y^2$, qui devient $\frac{a^2q}{y^2}=\frac{x^2}{a^2p}$. Nous ferons $\frac{a^2q}{y^2}=u$, $\frac{x^2}{a^2p}=u$; d'où nous tirerons $p=\frac{x^2}{a^2u}$, $q=\frac{uy^2}{a^2}$, $R=\frac{x^3}{3a^2u}$, $S=\frac{uy^3}{3a^2}$, $V=\frac{dR}{du}=-\frac{x^3}{3a^2u^2}$,

$U = \frac{dS}{du} = \frac{y^3}{3a^2}$; & nous aurons pour résoudre le Problême les deux équations $y^3 - \frac{x^3}{u^2} = 3a^2 F':(u)$, $z = \frac{1}{3a^2}\left(uy^3 + \frac{x^3}{u^2} - 3a^2 F:(u)\right)$.

Nous avons démontré (n°. 54) que M & N étant fonctions des deux variables y, x, si on supposoit $\mu M dx - \mu N dy = dS$, l'intégrale complette de l'équation $M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} = 0$ seroit $z = F:(S)$. M. Monge a ajouté à ce Théorême, connu depuis long-temps, que $z = F:(S)$ seroit encore l'intégrale complette de cette équation, quand bien même M & N, outre les deux variables dont nous venons de parler, renfermeroient aussi la fonction z de ces variables; c'est-à-dire que pour intégrer l'équation dans ce cas là, il suffiroit de chercher le facteur propre à rendre $Mdx - Ndy$ une différentielle exacte, en traitant z comme une quantité constante. En effet, à cause de $dz = \frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{dx}dx$ & de $\frac{dz}{dy} = -\frac{N}{M}\frac{dz}{dx}$, on a $dz = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{Mdx - Ndy}{M}$. Soit μ le facteur de $Mdx - Ndy$ lorsque z est regardé comme constant, soit aussi $\mu Mdx - \mu Ndy = dS$, on aura $dz = \frac{dz}{dx}\frac{dS}{\mu M}$. Mais S renferme x, y & z, & la différentielle dS que nous venons de trouver n'a été prise qu'en faisant varier x & y; il manque donc à dS un terme Kdz pour qu'elle soit la différentielle de S prise en faisant varier x, y & z. On ajoutera de part & d'autre de l'équation précédente

$\frac{dz}{dx}\frac{Kdz}{\mu M}$, & on aura $dz + \frac{dz}{dx}\frac{Kdz}{\mu M} = \frac{dz}{dx}$. $\frac{dS + Kdz}{\mu M}$, ou $dz + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{Kdz}{\mu M} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dS}{\mu M}$, dS étant ici la différentielle complette de S. Il sera facile de tirer de-là $dz = \frac{dz}{dx} \frac{dS}{\mu M + K\frac{dz}{dx}}$, & que par conséquent z ne peut être fonction que de S. Je prendrai pour exemple $xz\frac{dz}{dy} + y^2 \frac{dz}{dx} = 0$. Alors S égalera $\frac{x^2 z}{2} - \frac{y^3}{3}$, & $z = F : (3x^2z - 2y^3)$ sera l'intégrale complette de la proposée.

Jusqu'ici nous n'avons supposé que deux variables y & x ; si la fonction z en devoit renfermer trois y, x, u; & qu'on proposât d'intégrer complettement l'équation $M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + P\frac{dz}{du} = 0$; alors à cause de $dz = \frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{du}du$, on auroit, en éliminant successivement $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$ & $\frac{dz}{du}$, ces trois équations,

$$dz = \frac{dz}{dx}\left(dx - \frac{N}{M}dy\right) + \frac{dz}{du}\left(du - \frac{P}{M}dy\right),$$

$$dz = \frac{dz}{dy}\left(dy - \frac{M}{N}dx\right) + \frac{dz}{du}\left(du - \frac{P}{N}dx\right),$$

$$dz = \frac{dz}{dy}\left(dy - \frac{M}{P}du\right) + \frac{dz}{dx}\left(dx - \frac{N}{P}du\right).$$

1°. Si les fractions $\frac{N}{M}$ & $\frac{P}{M}$ ne renferment, l'une que

que x & y, l'autre que u & y; on cherchera les facteurs de $dx - \frac{N}{M}dy$ & $du - \frac{P}{M}dy$. Soient μ & μ' ces facteurs, $\mu dx - \frac{\mu N}{M}dy = dS$, $\mu' du - \frac{\mu' P}{M}dy = dS'$; on aura $dz = \frac{dz}{dx}\frac{dS}{\mu} + \frac{dz}{du}\frac{dS'}{\mu'}$, & z sera nécessairement fonction des seules variables S & S'. Donc $z = F:(S, S')$ est dans ce premier cas l'intégrale complette de la proposée. Si, par exemple, on avoit à intégrer $VXY\frac{dz}{du} + QV\frac{dz}{dx} + RX\frac{dz}{du} = 0$; où les quantités V, X, Y sont chacune fonction d'une des variables u, x, y, & où celles-ci Q, R sont fonctions l'une de x, y, l'autre de u, y; il s'agiroit de rendre exacte $dx - \frac{Qdy}{XY}$ & $du - \frac{Rdy}{VY}$ pour avoir μ, μ', S & S', & l'intégrale complette demandée seroit $z = F:(S, S')$. En effet, en supposant $dz = (AdS + BdS')F':(S, S')$, où A & B sont des fonctions de S & S' telles que $\frac{dA}{dS'} = \frac{dB}{dS}$, on aura $\frac{dz}{dy} = \left(A\frac{dS}{dy} + B\frac{dS'}{dy}\right)F':(S, S')$, $\frac{dz}{dx} = A\frac{dS}{dx}F':(S, S')$, $\frac{dz}{du} = B\frac{dS'}{du}F':(S, S')$. Mais $\frac{dS}{dx} = \mu$, $\frac{dS}{dy} = -\frac{\mu Q}{XY}$, $\frac{dS'}{dy} = -\frac{\mu' R}{VY}$, $\frac{dS'}{du} = \mu'$; donc $\frac{dz}{dy} = -\left(\frac{\mu AQ}{XY} + \frac{\mu' BR}{VY}\right)$ $F':(S, S')$, $\frac{dz}{dx} = A\mu F'(S, S')$, $\frac{dz}{du} = B\mu' F'$:

(S, S'); valeurs qui étant substituées dans la proposée, la rendront identique.

2°. Si les fractions $\frac{M}{N}$ & $\frac{P}{N}$ ne renferment, l'une que x & y, l'autre que u & x; on cherchera les facteurs de $dy - \frac{M}{N}dx$, $du - \frac{P}{N}dx$. Si on nomme $\mu 1$ & $\mu' 1$ ces facteurs, & qu'ensuite on fasse $\mu 1 dy - \frac{\mu 1 M}{N}dx = dS1$, $\mu' 1 du - \frac{\mu' P}{N}dx = dS'1$, on aura pour l'intégrale complette demandée, $z = F:(S1, S'1)$. Je prendrai pour exemple l'équation $QV\frac{dz}{dy} + VXY\frac{dz}{dx} + RY\frac{dz}{du} = 0$, où Q, V, X, Y signifient les mêmes choses que dans l'exemple précédent, & où R est une fonction de u & x. Pour résoudre ce Problême, je chercherai les facteurs de $dy - \frac{Qdy}{XY}$, $du - \frac{Rdx}{VX}$; & ayant trouvé de cette maniere $S1$ & $S'1$, j'aurai pour l'intégrale complette de la proposée $z = F:(S1, S'1)$; ce qu'on pourra facilement vérifier.

3°. Si les fractions $\frac{M}{P}$ & $\frac{N}{P}$ ne renferment, l'une que y & u; l'autre que x & u; on cherchera les facteurs de $dy - \frac{M}{P}du$, $dx - \frac{N}{P}du$. Ayant nommé $\mu 2$ & $\mu' 2$ ces facteurs, si l'on fait ensuite $\mu 2 dy - \frac{\mu 2 M}{P}du = dS2$, $\mu' 2 dx - \frac{\mu' 2 N}{P}du = dS'2$; on aura pour l'intégrale complette demandée $z = F$:

$(S2, S'2)$. Ainsi pour intégrer $QX\frac{dz}{dy} + RY\frac{dz}{dx} + VXY\frac{dz}{du} = 0$, où V, X, Y signifient toujours les mêmes choses, & où les quantités Q & R sont fonctions, l'une de y, u, l'autre de x, u; on cherchera les facteurs de $dy - \frac{Qdu}{YV}$, $dx - \frac{Rdu}{XV}$, & lorsqu'on aura trouvé de cette maniere $S2$ & $S'2$; on fera $z = F:(S2, S'2)$, & on aura l'intégrale complette demandée.

Soient $\frac{dz}{du} = n$, $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$; on demande de l'intégrale complette de $npq = 1$. On tire de cette équation $n = \frac{1}{pq}$; &, à cause de $dz = ndu + pdx + qdy$, on a $dz = \frac{du}{pq} + pdx + qdy$, & par conséquent $z = \frac{u}{pq} + px + qy - \int\left(xdp + ydq - \frac{udp}{p^2q} - \frac{udq}{pq^2}\right)$. Cette transformation nous apprend que $\left(x - \frac{u}{p^2q}\right)dp + \left(y - \frac{u}{pq^2}\right)dq$ doit être la différentielle exacte d'une fonction de p & q. Nommons S cette fonction; & nous aurons $z = px + qy + \frac{u}{pq} - S$, $x - \frac{u}{p^2q} = \frac{dS}{dp}$, $y - \frac{u}{pq^2} = \frac{dS}{dq}$. Il suit de tout cela que si nous prenons une fonction quelconque S de p & q, nous aurons pour résoudre le Problême les trois équations $x = \frac{u}{p^2q} +$

$\frac{dS}{dp}$, $y = \frac{u}{pq^2} + \frac{dS}{dq}$ & $z = \frac{3u}{pq} + p\frac{dS}{dp} +$ $q\frac{dS}{dq} - S$.

Si nous voulions une des intégrales particulieres de cette équation $npq = 1$, nous ferions, par exemple, $S =$ constante, pour que $\frac{dS}{dp} = 0$, $\frac{dS}{dq} = 0$, & nous aurions d'abord les deux équations $p^2 q = \frac{u}{x}$, $pq^2 = \frac{u}{y}$, desquelles nous tirerions $p^3 q^3 = \frac{u^2}{xy}$, $pq = \sqrt[3]{\left(\frac{u^2}{xy}\right)}$; & par conséquent $p = \sqrt[3]{\left(\frac{uy}{x^2}\right)}$, $q = \sqrt[3]{\left(\frac{ux}{y^2}\right)}$, $z = 3\sqrt[3]{(uxy)} - C$; cette valeur de z satisfait évidemment à la proposée. Il n'est pas moins clair que si l'on prend $z = 3\sqrt[3]{[(u+a)(x+b)(y+c)]} - C$, qui est une valeur de z un peu plus générale que la précédente, on doit aussi satisfaire à la même équation.

Il y a d'autres intégrales particulieres de la même équation $npq = 1$, auxquelles nous nous arrêterons à cause de leur simplicité; ce sont celles qu'on trouve en prenant $S = 2c\sqrt{pq}$. En effet, à cause de $\frac{dS}{dp} = \frac{c\sqrt{q}}{\sqrt{p}}$, $\frac{dS}{dq} = \frac{c\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, on a alors les trois équations $x = \frac{u}{p^2 q} + \frac{c\sqrt{q}}{\sqrt{p}}$, $y = \frac{u}{pq^2} + \frac{c\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, $z = \frac{3u}{pq}$. Or en multipliant les deux premieres l'une par

l'autre, il vient $xy = \frac{u^2}{p^3q^3} + \frac{2cu}{pq\sqrt{pq}} + c^2$, ou $p^3q^3 - \frac{2cu}{xy-c^2} pq\sqrt{pq} = \frac{u^2}{xy-c^2}$; d'où l'on tire $pq\sqrt{pq} = -\frac{u}{c \pm \sqrt{xy}}$ & $pq = \sqrt[3]{\left(\frac{u^2}{(c \pm \sqrt{xy})^2}\right)}$. Donc $z = 3\sqrt[3]{[u(c \pm \sqrt{xy})^2]}$; & comme on peut permuter les trois variables entr'elles, il est visible qu'on a aussi ces deux autres intégrales particulieres $z = 3\sqrt[3]{[x(c1 \pm \sqrt{uy})^2]}$, $z = 3\sqrt[3]{[y(c2 \pm \sqrt{ux})^2]}$.

C'est à peu près ainsi que M. Euler résoud ces Problêmes dans le troisiéme volume de son Calcul Intégral; je ne suivrai pas plus loin la méthode de ce grand Géométre; celle dont je vais me servir est tirée d'un Mémoire que j'ai lu à l'Académie dans le courant de 1772. Voici le titre des Ouvrages qu'on avoit alors sur cette partie importante du Calcul Intégral: un Mémoire de M. d'Alembert, cité page 295; le troisiéme volume du Calcul Intégral de M. Euler; les Recherches de M. de la Grange sur la nature & la propagation du son, qui se trouvent dans les trois premiers volumes de Mêlanges de la Société Royale de Turin; un Mémoire de M. le Marquis de Condorcet, imprimé dans le volume de l'Académie de 1770. Depuis, MM. de la Place & Monge se sont occupés des mêmes questions. Le travail de M. Monge a déja paru dans le cinquiéme volume des Mêlanges de la Société Royale de Turin. Les Mémoires de M. de la Place sur le Calcul Intégral que nous avons eu occasion de citer dans cet Ouvrage, doivent faire desirer de voir celui dont il s'agit, & qui paroîtra dans le volume de l'Académie de 1773.

83. J'imagine entre y, x & une fonction de ces variables que je nomme z, l'équation $(B)+F:(\omega)=0$ qui renferme une fonction arbitraire. Je différentie cette équation deux fois, l'une par rapport à y, l'autre par rapport à x; ce qui me donne $\frac{d(B)}{dy}+\frac{d\omega}{dy}F':(\omega)=0$, $\frac{d(B)}{dx}+\frac{d\omega}{dx}F':(\omega)=0$; avec ces deux équations j'élimine $F':(\omega)$, & il me vient $\frac{d(B)}{dy}-r\frac{d(B)}{dx}=0$, où j'ai fait pour abréger $\frac{d\omega}{dy}:\frac{d\omega}{dx}=r$. Or si nous supposons $d(B)=\frac{d(B)}{dx}dx+\frac{d(B)}{dy}dy+\frac{d(B)}{dz}dz$, nous aurons $\frac{d(B)}{dy}=\frac{d(B)}{dy}+\frac{d(B)}{dz}\frac{dz}{dy}$, $\frac{d(B)}{dx}=\frac{d(B)}{dx}+\frac{d(B)}{dz}\frac{dz}{dx}$; & l'équation précédente deviendra $\frac{d(B)}{dz}\frac{dz}{dy}-r\frac{d(B)}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{d(B)}{dy}-r\frac{d(B)}{dx}=0$. Nous allons faire usage de cette transformée pour intégrer complettement l'équation $M\frac{dz}{dy}+N\frac{dz}{dx}+V=0$, dans laquelle M, N sont fonctions de x, y, & V fonction de x, y, z.

Il faudra multiplier cette équation par un facteur Ψ; puis il faudra la comparer à la transformée, ce qui donnera $\frac{d(B)}{dz}=M\Psi$, $-r\frac{d(B)}{dz}=N\Psi$,

$\frac{d(B)}{dy} - r\frac{d(B)}{dx} = V\psi$. On tirera des deux premieres équations $Mr + N = 0$; la troisiéme deviendra $\frac{d(B)}{dy} - r\frac{d(B)}{dx} = \frac{V}{M}\frac{d(B)}{dz}$; & le Problême sera réduit à trouver pour ω & (B) des valeurs qui satisfassent aux deux équations $M\frac{d\omega}{dy} + N\frac{d\omega}{dx} = 0$, $M\frac{d(B)}{dy} + N\frac{d(B)}{dx} - V\frac{d(B)}{dz} = 0$.

Pour satisfaire à la premiere, on prendra $\omega = S$, S étant l'intégrale de la différentielle $Mdx - Ndy$ multipliée par un facteur μ propre à la rendre exacte. Mais $d(B) = \frac{d(B)}{dx}dx + \frac{d(B)}{dy}dy + \frac{d(B)}{dz}dz$; en mettant dans cette équation pour $\frac{d(B)}{dy}$ sa valeur $-\frac{N}{M}\frac{d(B)}{dx} + \frac{V}{M}\frac{d(B)}{dz}$, on aura $d(B) = \frac{d(B)}{dx}\cdot\frac{Mdx - Ndy}{M} + \frac{d(B)}{dz}\left(dz + \frac{Vdy}{M}\right) = \frac{d(B)}{dx}\frac{dS}{\mu M} + \frac{d(B)}{dz}\left(dz + \frac{Vdy}{M}\right)$. On regardera S comme constant, ce qui réduira l'équation précédente à celle-ci $d(B) = \frac{d(B)}{dz}\left(dz + \frac{Vdy}{M}\right)$; & il ne sera plus question, pour trouver (B), que de chercher le facteur de la différentielle $dz + \frac{Vdy}{M}$ (dans laquelle on mettra auparavant pour x sa valeur en y & S tirée de $\int(\mu Mdx - \mu Ndy) = S$)

en regardant S comme constant. Si la différentielle exacte qu'on trouvera de cette maniere est dT, $T = F:(S)$ sera l'intégrale complette de $M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + V = o$, M, N étant des fonctions quelconques de x, y, & V une fonction quelconque de x, y, z.

On auroit pû mettre dans l'équation $d(B) = \frac{d(B)}{dx}dx + \frac{d(B)}{dy}dy + \frac{d(B)}{dz}dz$, pour $\frac{d(B)}{dx}$ sa valeur $-\frac{M}{N}\frac{d(B)}{dy} + \frac{V}{N}\frac{d(B)}{dz}$, ce qui auroit donné $d(B) = -\frac{d(B)}{dy}\cdot\frac{Mdx - Ndy}{N} + \frac{d(B)}{dz}\left(dz + \frac{Vdx}{N}\right) = -\frac{d(B)}{dy}\frac{dS}{\mu N} + \frac{d(B)}{dz}\left(dz + \frac{Vdx}{N}\right)$; & tout se feroit réduit à transformer la différentielle $dz + \frac{Vdx}{N}$ en mettant pour x sa valeur en y & S, & à chercher ensuite le facteur propre à la rendre exacte en regardant S comme constant. Si de cette maniere on eût trouvé pour différentielle exacte $d\theta$, on auroit pris $\theta = F:(S)$ pour l'intégrale complette de la proposée. Il ne sera pas inutile d'éclaircir ce que nous venons de dire par quelques exemples.

1°. Si $V = Pz + Q$, P & Q étant des fonctions quelconques de x & y; il s'agira de rendre exacte la différentielle $dz + \frac{P}{M}zdy + \frac{Q}{M}dy$, ou celle-ci $dz + \frac{P}{N}zdx + \frac{Q}{N}dx$. Je suppose qu'ayant mis pour x sa valeur en y & S, la premiere devienne

$dz + \frac{P'}{M'} z\,dy + \frac{Q'}{M'}\,dy$, qui a pour facteur $e^{\int \frac{P'}{M'} dy}$; ou qu'ayant mis pour y sa valeur en x & S, la seconde devienne $dz + \frac{(P)}{(N)} z\,dx + \frac{(Q)}{(N)}\,dx$; qui a pour facteur $e^{\int \frac{(P)}{(N)} dx}$. On aura donc $T = z e^{\int \frac{P'}{M'} dy} + \int e^{\int \frac{P'}{M'} dy} \frac{Q'}{M'}\,dy$, $\theta = z e^{\int \frac{(P)}{(N)} dx} + \int e^{\int \frac{(P)}{(N)} dx} \frac{(Q)}{(N)}\,dx$; & pour intégrale complette $z = e^{-\int \frac{P'}{M'} dy} \left(F:(S) - \int e^{\int \frac{P'}{M'} dy} \frac{Q'}{M'}\,dy\right)$, ou $z = e^{-\int \frac{(P)}{(N)} dx} \left(F:(S) - \int e^{\int \frac{(P)}{(N)} dx} \frac{(Q)}{(N)}\right) dx$, comme nous l'avons trouvé n°. 54.

2°. Soit proposé d'intégrer les équations $Y \frac{dz}{dy} + X \frac{dz}{dx} = Z$ & $X \frac{dz}{dy} + Y \frac{dz}{dx} = Z$, où les quantités X, Y, Z sont chacune fonction d'une des variables x, y, z. Pour la premiere, il faudra rendre exactes les deux différentielles $Y\,dx - X\,dy$ & $dz - \frac{Z\,dy}{Y}$, dont l'une a pour facteur $\frac{1}{XY}$ & l'autre $\frac{1}{Z}$. On trouvera de cette maniere $S = \int \frac{dx}{X} - \int \frac{dy}{Y}$, $T = \int \frac{dz}{Z} - \int \frac{dy}{Y}$; & pour l'intégrale complette demandée $\int \frac{dz}{Z} - \int \frac{dy}{Y} = F:\left(\int \frac{dx}{X} - \int \frac{dy}{Y}\right)$.

Mais pour intégrer $X\frac{dz}{dy}+Y\frac{dz}{dx}=Z$, il fera plus fimple de chercher S & θ en rendant exactes les deux différentielles $X\,dx-Y\,dy$ & $dz-\frac{Z\,dx}{X}$, dont l'une a pour facteur l'unité & l'autre $\frac{1}{Z}$; on trouvera de cette maniere pour l'intégrale complette demandée $\int\frac{dz}{Z}-\int\frac{dx}{X}=F:(\int X\,dx-\int Y\,dy)$.

3°. Si M & N étant des fonctions homogènes de x & y de même dimenfion e, & Z une fonction de z feul, on fait dans la propofée $V=Z$; il faudra prendre $y=ux$, pour avoir $M=x^eU$, $N=x^eU'$, où U & U' ne renferment de variables que u. On tirera de-là $M\,dx-N\,dy=x^e([U-uU']\,dx-U'x\,du)$, qui a pour facteur $\frac{1}{x^{e+1}(U-uU')}$. Donc $dS=\frac{dx}{x}-\frac{U'\,du}{U-uU'}$; &, à caufe de $dz+\frac{Z\,dy}{M}=dz+\frac{Z(u\,dx+x\,du)}{x^eU}$, on aura $T=\int\frac{dz}{Z}+\int\frac{u\,dx+x\,du}{x^eU}$, où l'intégrale de $\frac{u\,dx+x\,du}{x^eU}$ fera prife par rapport à u après avoir mis pour x & dx leurs valeurs en u, S, du & dS. Soient, par exemple, $M=x^2$, $N=xy$; on aura $e=2$, $U=1$, $U'=u$, & $dS=\frac{dx}{x}-\frac{u\,du}{1-u^2}$, d'où l'on tirera $e^S=x\sqrt{(1-u^2)}$. On mettra pour x & dx leurs valeurs dans $\frac{u\,dx+x\,du}{x^2}$, & on aura

la différentielle $e^{-S}\left(udS\sqrt{(1-u^2)}+\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}\right)$ dont l'intégrale, prise en ne faisant varier que u, sera $e^{-S} A$ sin. u. Ainsi dans ce cas particulier, on aura pour intégrale complette $\int\frac{dz}{Z}+\frac{1}{\sqrt{(x^2-y^2)}}$ A sin. $\frac{y}{x}=F:(x^2-y^2)$. Lorsque $U-uU'=0$, on a $\frac{M}{N}=\frac{y}{x}$, ce qui donne $M=Py$, $N=Px$, P étant une fonction quelconque de x & y. Alors $Mdx-Ndy=P(ydx-xdy)$, différentielle qui devient exacte étant divisée par Py^2, & on a $S=\frac{x}{y}$. Il ne reste plus qu'à intégrer $\frac{dz}{Z}+\frac{dy}{Py}$, après avoir mis dans P pour x sa valeur yS. Si, par exemple, la proposée étoit $xy\frac{dz}{dy}+x^2\frac{dz}{dx}+Z=0$, on auroit $P=x$ & $\frac{dy}{Py}=\frac{dy}{Sy^2}$, dont l'intégrale, prise en ne faisant varier que y, feroit $\frac{-1}{Sy}=\frac{-1}{x}$. On auroit donc pour l'intégrale complette demandée $\int\frac{dz}{Z}=\frac{1}{x}+F:\left(\frac{x}{y}\right)$.

4°. Je proposerai pour dernier exemple d'intégrer l'équation $y\frac{dz}{dy}+x\frac{dz}{dx}+\frac{\sqrt{(x^2+y^2z^2)}}{\sqrt{(x^2+y^4)}}.\frac{y^2}{z}=0$, où $M=y$, $N=x$ & $\frac{V}{M}=\frac{\sqrt{(x^2+y^2z^2)}}{\sqrt{(x^2+y^4)}}.\frac{y}{z}$.

Il eſt clair que $S = \frac{x}{y}$; il ne s'agit donc plus que de chercher le facteur de $d\zeta + \frac{\sqrt{(S^2+\zeta^2)}}{\sqrt{(S^2+y^2)}} \frac{y\,dy}{\zeta}$, en regardant S comme conſtant. Or ce facteur eſt $\frac{\zeta}{\sqrt{(S^2+\zeta^2)}}$; on aura donc $T = \int \frac{\zeta\,d\zeta}{\sqrt{(S^2+\zeta^2)}} + \int \frac{y\,dy}{\sqrt{(S^2+y^2)}} = \sqrt{(S^2+\zeta^2)} + \sqrt{(S^2+y^2)}$, & $\sqrt{(x^2+y^2\zeta^2)} + \sqrt{(x^2+y^4)} = yF:\left(\frac{x}{y}\right)$ ſera l'intégrale complette demandée. De l'autre maniere, on auroit eu à chercher le facteur de $d\zeta + \frac{\sqrt{(x^2+y^2\zeta^2)}}{\sqrt{(x^2+y^4)}} \cdot \frac{y^2\,dx}{x\zeta}$, qui, en mettant pour y ſa valeur $\frac{x}{S}$, ſeroit devenu $d\zeta + \frac{\sqrt{(S^2+\zeta^2)}}{\sqrt{(S^4+x^2)}} \cdot \frac{x\,dx}{S\zeta}$, & auroit donné $0 = \sqrt{(S^2+\zeta^2)} + \frac{\sqrt{(S^4+x^2)}}{S} = \frac{\sqrt{(x^2+y^2\zeta^2)}}{y} + \frac{\sqrt{(x^2+y^4)}}{y}$; c'eſt-à-dire que de cette autre maniere on auroit trouvé un réſultat abſolument conforme au précédent.

84. Si $(B) + F:(\omega) = 0$ eſt l'intégrale premiere complette d'une équation du ſecond ordre, (B) renfermera néceſſairement x, y, ζ & les différences partielles $\frac{d\zeta}{dy}$, $\frac{d\zeta}{dx}$ que nous nommerons α', $\mathcal{C}'$. Alors à cauſe de $d(B) = \frac{d(B)}{dx}dx + \frac{d(B)}{dy}dy + \frac{d(B)}{d\zeta}d\zeta +$

$\frac{d(B)}{d\alpha'}d\alpha' + \frac{d(B)}{d\mathcal{C}'}d\mathcal{C}'$, nous aurons $\frac{d(B)}{dy} = \frac{d(B)}{dy} + \frac{d(B)}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{d(B)}{d\alpha'}\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d(B)}{d\mathcal{C}'}\frac{d^2z}{dydx}$, $\frac{d(B)}{dx} = \frac{d(B)}{dx} + \frac{d(B)}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{d(B)}{d\alpha'}\frac{d^2z}{dydx} + \frac{d(B)}{d\mathcal{C}'}\frac{d^2z}{dx^2}$; en mettant ces valeurs dans l'équation $\frac{d(B)}{dy} - r\frac{d(B)}{dx} = 0$, nous la changerons en celle-ci,

$$\frac{d(B)}{d\alpha'}\frac{d^2z}{dy^2} + \left(\frac{d(B)}{d\mathcal{C}'} - r\frac{d(B)}{d\alpha'}\right)\frac{d^2z}{dydx} - r\frac{d(B)}{d\mathcal{C}'}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d(B)}{dz}\frac{dz}{dy} - r\frac{d(B)}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{d(B)}{dy} - r\frac{d(B)}{dx} = 0.$$

Nous allons faire uſage de cette transformée pour trouver tous les cas où les équations linéaires du ſecond ordre peuvent avoir une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur.

On peut repréſenter toutes les équations linéaires du ſecond ordre par celle-ci,

$$A\frac{d^2z}{dy^2} + B\frac{d^2z}{dydx} + C\frac{d^2z}{dx^2} + Vz = W,$$
$$+ B'\frac{dz}{dy} + C'\frac{dz}{dx}$$

dans laquelle A, B, C, B', C', V & W ſont des fonctions de y & x. Je multiplie cette équation par un facteur Ψ, & je la compare enſuite à la transformée précédente, ce qui me donne d'abord $\frac{d(B)}{d\alpha'} = \Psi A$.

$\frac{d(B)}{d\beta'} - r\frac{d(B)}{d\alpha'} = \psi B$, $-r\frac{d(B)}{d\beta'} = \psi C$; d'où je tire $\frac{d(B)}{d\alpha'} = \psi A$, $\frac{d(B)}{d\beta'} = \psi(Ar + B)$, & que r est donné par l'équation du second degré $Ar^2 + Br + C = 0$. Ayant r, il sera bien facile de trouver ω au moyen de l'équation $\frac{d\omega}{dy} - r\frac{d\omega}{dx} = 0$, en supposant toutefois qu'on connoisse le facteur propre à rendre $rdy + dx$ une différentielle exacte; car si l'on nomme a ce facteur, & que l'on fasse $ardy + adx = db$, on sait que $\omega = b$ satisfait à l'équation $\frac{d\omega}{dy} - r\frac{d\omega}{dx} = 0$.

$\frac{d(B)}{dy} - r\frac{d(B)}{dx}$ est une fonction du premier ordre; je lui donne la forme suivante, $\alpha 1\frac{dz}{dy} + \beta 1\frac{dz}{dx} + \varphi 1 z + X 1$, & je suppose $\frac{d(B)}{dz} + \alpha 1 = \psi B'$, $-r\frac{d(B)}{dz} + \beta 1 = \psi C'$, $\varphi 1 = \psi V$, $X 1 = -\psi W$. Il suit de-là que $\frac{d(B)}{dz} = \psi B' - \alpha 1$, & qu'on a de plus les trois équations $\psi(B'r + C') = \alpha 1 r + \beta 1$, $\psi V = \varphi 1$, $X 1 + \psi W = 0$.

Je ferai pour abréger $Ar + B = B(1)$, $B'r + C' = C'(1)$, $\frac{dA}{dy} - r\frac{dA}{dx} = \dot{A}$, &c, $\frac{d\psi}{dy} - r\frac{d\psi}{dx} = \dot{\psi}$, $\frac{d\dot{\psi}}{dy} - r\frac{d\dot{\psi}}{dx} = \ddot{\psi}$: cela posé, si le

facteur ψ ne doit être fonction que des seules variables y & x, $\psi\left(A\frac{dz}{dy}+B(1)\frac{dz}{dx}\right)$ sera la somme de tous les termes de (B) qui renfermeront des différences partielles du premier ordre ; & on aura $\alpha 1=A\dot{\psi}+\psi\dot{A}$, $\mathfrak{C}1=B(1)\dot{\psi}+\psi\dot{B}(1)$. Donc $((B'-\dot{A}).\psi-\dot{A}\psi)z$, dans la même hypothèse, sera le terme de (B) qui renfermera z ; & après avoir fait pour abréger $B'-\dot{A}=B'(2)$, on aura $\phi 1=\psi\ddot{B}'(2)+(B'(2)-\dot{A})\dot{\psi}-A\ddot{\psi}$, ou $\phi 1=\dot{B}'(2)\psi+B'(3)\dot{\psi}-A\ddot{\psi}$, en faisant encore pour abréger $B'(2)-\dot{A}=B'(3)$. Nous avons trouvé plus haut $\phi 1=\psi V$; nous aurons donc l'équation $(1)\ldots\ldots(V-\dot{B}'(2))\psi-B'(3)\dot{\psi}+A\ddot{\psi}=0.$ Celle-ci $\psi C'(1)=\alpha 1 r+\mathfrak{C}1$, après avoir mis pour $\alpha 1$ & $\mathfrak{C}1$ leurs valeurs, & avoir fait pour abréger $C'(1)-\dot{A}r-\dot{B}(1)=C'(2)$, $Ar+B(1)=B(2)$, devient $(2)\ldots\ldots C'(2)\psi-B(2)\dot{\psi}=0$. Voilà donc deux équations 1 & 2, dont l'une servira à trouver le facteur ψ, & l'autre sera l'équation de condition qui devra avoir lieu pour que la proposée ait une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur.

Soit $\ddot{\psi}=K$; à cause de $\ddot{\psi}=\frac{d\dot{\psi}}{dy}-r\frac{d\dot{\psi}}{dx}$, on a $\dot{\psi}=\int K'dy$, K' étant ce que devient K après avoir mis pour x sa valeur en y & b tirée de l'équation $\int(ardy+adx)=b$. De même, $\dot{\psi}$ étant égale à

$\frac{d\Psi}{dy} - r\frac{d\Psi}{dx}$, on a $\Psi = \int dy \int K' dy$. En mettant ces valeurs de Ψ, $\dot{\Psi}$, $\ddot{\Psi}$ dans les équations 1 & 2; elles deviennent $(V - \dot{B}(2))\int dy \int K' dy - B'(3)\int K' dy + AK' = 0$, $C'2\int dy \int K' dy - B'(2)\int K' dy = 0$. Or si je fais $\frac{B'(3)}{V - \dot{B}'(2)} = a1$, $\frac{A}{V - \dot{B}'(2)} = b1$, $\frac{B'(2)}{C'(2)} = a2$, & que je nomme $a'1$, $b'1$, $a'2$ ce que deviennent $a1$, $b1$, $a2$, lorsqu'on a mis pour x sa valeur en y & b, j'aurai les équations $\int dy \int K' dy - a'1 \int K' dy + b'1 K' = 0$, $\int dy \int K' dy - a'2 \int K' dy = 0$, qui étant différentiées par rapport à y, donneront $\left(1 - \frac{da'1}{dy}\right)\int K' dy - \left(a'1 - \frac{db'1}{dy}\right)K' + b'1\frac{dK'}{dy} = 0$, $\left(1 - \frac{da'2}{dy}\right)\int K' dy - a'2 K' = 0$.

En faisant encore $\frac{a'1 - \frac{db'1}{dy}}{1 - \frac{da'1}{dy}} = a''1$, $\frac{b'1}{1 - \frac{da'1}{dy}} = b''1$; $\frac{a'2}{1 - \frac{da'2}{dy}} = a''2$, celles-ci deviendront $\int K' dy - a''1 K' + b''1 \frac{dK'}{dy} = 0$, $\int K' dy - a''2 K' = 0$, & donneront, en différentiant par rapport à y,

$$(a) \ldots \left(1 - \frac{da''1}{dy}\right)K' - \left(a''1 - \frac{db''1}{dy}\right)\frac{dK'}{dy} + b''1\frac{d^2K'}{dy^2} = 0,$$

(b)

$(b) \ldots \left(1 - \frac{da''2}{dy}\right)K' - a''2\frac{dK'}{dy} = 0.$

Donc K' sera donné par l'une de ces deux équations entre K', y & b, qu'on peut regarder comme étant aux différences ordinaires; car puisqu'il n'est question que de satisfaire aux équations de condition, on doit pouvoir y supposer b constant.

Il ne nous reste plus qu'à déterminer le terme de (B) qui n'est fonction que de x, y; nommons-le X; &, à cause de $\frac{dX}{dy} - r\frac{dX}{dx} = X1 = -\psi W$, nous aurons $X = -\int \psi W dy$, en faisant attention qu'avant d'intégrer par rapport à y, il faudra mettre dans ψW pour x sa valeur en y & b tirée de l'équation $\int(ar\,dy + a\,dx) = b$. Ainsi l'intégrale premiere complette sera $\psi\left(A\frac{dz}{dy} + B(1)\frac{dz}{dx}\right) + (B'(2)\psi - A\dot{\psi})z + F:(b) = \int \psi W dy$.

Nous avons intégré (n°. 55) l'équation du second ordre $\frac{d^2z}{dy^2} = c^2\frac{d^2z}{dx^2}$; si nous la prenons pour exemple, nous trouverons $A = 1$, $B = 0$, $C = -c^2$ & les autres coefficiens nuls; nous aurons pour déterminer r, l'équation du second degré $r^2 - c^2 = 0$, qui donnera $r = \pm c$, & par conséquent $b = \pm cy + x$. De plus, à cause de $B(1) = \pm c$, $B(2) = \pm 2c$, & de $C'(1)$, $B'(2)$, $B'(3)$, $C'(2)$ qui sont nuls, les équations 1 & 2 se réduiront à celles-ci, $\dot{\psi} = 0$, $\ddot{\psi} = 0$, auxquelles nous satisferons en prenant $\psi = 1$; nous trouverons ensuite ces deux intégrales premieres complettes (car les deux valeurs de r ont également lieu) $\frac{dz}{dy} + c\frac{dz}{dx} + F':(x + cy) = 0$, & $\frac{dz}{dy} -$

$c\frac{dz}{dx} + f':(x-cy) = 0$, desquelles nous tirerons $2\frac{dz}{dy} + F':(x+cy) + f':(x-cy) = 0$, $2c\frac{dz}{dx} + F':(x+cy) - f':(x-cy = 0$, & par conséquent $2cdz = -(cdy+dx)F':(x+cy) - (cdy-dx)f':(x-cy)$, qui donne évidemment $2cz = -F:(x+cy) - f:(x-cy)$, ou, ce qui revient au même, puisque les fonctions désignées par F & f doivent être arbitraires, $z = F:(x+cy) + f:(x-cy)$.

Si je prens pour second exemple l'équation $\frac{d^2z}{dy^2} - h^2\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{h}{x}\frac{dz}{dy} + \frac{h}{x^2}\frac{dz}{dx} = 0$; j'aurai $A=1$, $B=0$, $C=-h^2$, $B'=\frac{h}{x}$, $C'=\frac{h^2}{x}$, $V=0$, $W=0$, & pour déterminer r l'équation du second degré $r^2-h^2=0$, qui donnera $r=h$ ou $r=-h$. En faisant usage de la premiere valeur de r, je trouverai $b=hy+x$; puis $B(1)=h$, $\dot{A}=0$, $\dot{B}(1)=0$, $C'(1)=\frac{2h^2}{x}$, $B'(2)=\frac{h}{x}$, $\dot{B}'(2)=\frac{h^2}{x^2}$, $B'(3)=\frac{h}{x}$, $C'(2)=\frac{2h^2}{x}$, $B(2)=2h$. Les équations 1 & 2 deviendront $-\frac{h^2}{x^2}\Psi - \frac{h}{x}\dot{\Psi} + \ddot{\Psi} = 0$, $\frac{h}{x}\Psi - \dot{\Psi} = 0$. Je ferai $\dot{\Psi} = K$, d'où $\Psi = \int K'dy$; en mettant dans la seconde équation pour x sa valeur $b-hy$, je la changerai en celle-ci, $h\int K'dy - (b-hy)K' = 0$, de laquelle je tirerai, en ne faisant varier que y, $2hK' - (b-hy)\frac{dK'}{dy} = 0$,

& $K' = \frac{1}{(b-hy)^2}$. Donc $\psi = \frac{1}{h(b-hy)} = \frac{1}{hx}$; comme cette valeur de ψ satisfait aussi à la premiere équation de condition, il s'ensuit que la proposée a pour intégrale premiere complette $\frac{dz}{dy} + h\frac{dz}{dx} + hxF:(hy+x) = 0$. Celle-ci étant intégrée donnera $z = -\int hdy(hy+S)F:(2hy+S) + f:(S)$, S étant égal à $x-hy$; c'est pourquoi, si au lieu de la différentielle $hdy(hy+S)F:(2hy+S)$, j'écris $hdy(hy+S)\phi'':(2hy+S)$, dont l'intégrale, prise en ne faisant varier que y, est $\frac{hy+S}{2}\phi':(2hy+S) - \frac{1}{4}\phi:(2hy+S)$; j'aurai

$$z = -\frac{x}{2}\phi':(x+hy) + \frac{1}{4}\phi:(x+hy) + f:(x-hy)$$

qui est la valeur complette de z dans l'équation $\frac{d^2z}{dy^2} - h^2\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{h}{x}\frac{dz}{dy} + \frac{h}{x^2}\frac{dz}{dx} = 0$. Si j'eusse pris $r = -h$, j'aurois trouvé $b = x - hy$; puis $B(1) = h$, $C'(1) = 0$, $\dot{A} = 0$, $\dot{B}(1) = 0$, $B'(2) = \frac{h}{x}$, $\dot{B}'(2) = \frac{-h^2}{x^2}$, $B'(3) = \frac{h}{x}$, $C'(2) = 0$, $B(2) = -2h$. Les équations 1 & 2 seroient devenues $\frac{h^2}{x^2}\psi - \frac{h}{x}\dot{\psi} + \ddot{\psi} = 0$, $\dot{\psi} = 0$; mais $\dot{\psi} = 0$ donne $\psi = b$ qui ne satisfait point à l'autre équation de condition; donc, &c

Soit proposé pour troisiéme exemple, d'intégrer l'équation $\frac{d^2z}{dy^2} - \frac{x^2}{y^2}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dy} - \frac{1}{y}\frac{dz}{dx}$

$+\frac{2z}{xy}=0$. On fera $A=1$, $B=0$, $C=-\frac{x^2}{y^2}$, $B'=\frac{1}{x}$, $C'=\frac{-1}{y}$, $V=\frac{2}{xy}$, $W=0$; &, à cause de $r^2-\frac{x^2}{y^2}=0$, on aura ou $r=\frac{x}{y}$, ou $r=-\frac{x}{y}$. En faisant usage de la valeur positive de r, on trouvera $b=xy$; puis $\dot{A}=0$, $B(1)=\frac{x}{y}$, $\dot{B}(1)=-\frac{2x}{y^2}$, $C'(1)=0$, $B'(2)=\frac{1}{x}$, $\dot{B}'(2)=\frac{1}{xy}$, $B'(3)=\frac{1}{x}$, $C'(2)=\frac{2x}{y^2}$, $B(2)=\frac{2x}{y}$; & pour équations de condition $\frac{1}{xy}\Psi-\frac{1}{x}\dot{\Psi}+\ddot{\Psi}=0$, $\frac{1}{y}\Psi-\dot{\Psi}=0$. Si l'on fait $\dot{\Psi}=K$, on aura $\Psi=\int K'dy$, & $\int K'dy-yK'=0$, qui donne évidemment $K'=b$, & par conséquent $\Psi=by=xy^2$. Cette valeur de Ψ satisfait à l'autre équation de condition; donc $xy^2\frac{dz}{dy}+x^2y\frac{dz}{dx}+(y^2-xy)z+F:(xy)=0$ est l'intégrale premiere complette de la proposée.

Le quatriéme exemple sera d'intégrer l'équation $y^2\frac{d^2z}{dy^2}+2xy\frac{d^2z}{dxdy}+x^2\frac{d^2z}{dx^2}=0$. Alors on aura $A=y^2$, $B=2xy$, $C=x^2$, $B'=0$, $C'=0$, $V=0$, $W=0$; & r sera donné par l'équation $y^2r^2+2xyr+x^2=(yr+x)^2=0$, d'où l'on tirera $r=\frac{-x}{y}$, puis $b=\frac{x}{y}$. De plus $\dot{A}=2y$, $B(1)=xy$,

$\dot{B}(1)=2x$, $C'(1)=0$, $B'(2)=-2y$, $\dot{B}'(2)=-2$, $B'(3)=-4y$; &, à cause de $C'(2)=0$, $B(2)=0$, il n'y a qu'une seule équation de condition, savoir, $2\Psi+4y\dot{\Psi}+y^2\ddot{\Psi}=0$. On fera $\ddot{\Psi}=K$, pour avoir $\dot{\Psi}=\int K'dy$, $\Psi=\int dy\int K'dy$; ces valeurs étant substituées dans l'équation précédente, il en résultera celle-ci, $2\int dy\int K'dy+4y\int K'dy+y^2K'=0$, qui, lorsqu'on aura fait disparoître les signes d'intégration, deviendra $12K'+8y\frac{dK'}{dy}+y^2\frac{d^2K'}{dy^2}=0$. On sait qu'on satisfera à l'équation précédente, en prenant $K'=y^\lambda$, & λ sera donné par l'équation du second degré $\lambda^2+7\lambda+12=0$, d'où l'on tirera $\lambda=-4$ ou $\lambda=-3$. En se servant de la premiere valeur, on trouvera $\Psi=\frac{1}{6y^2}$; & pour intégrale premiere complette $y\frac{dz}{dy}+x\frac{dz}{dx}+6yF:\left(\frac{x}{y}\right)=0$. L'autre valeur de λ donnera $\Psi=\frac{1}{2y}$ qui est aussi un des facteurs de la proposée; si l'on en fait usage, on trouvera cette autre intégrale premiere $y\frac{dz}{dy}+x\frac{dz}{dx}-z+2f:\left(\frac{x}{y}\right)=0$. Avec les deux intégrales trouvées, on chassera $y\frac{dz}{dy}+x\frac{dz}{dx}$, & on aura $z=2f:\left(\frac{x}{y}\right)-6yF:\left(\frac{x}{y}\right)$, ou mieux $z=f:\left(\frac{x}{y}\right)+yF:\left(\frac{x}{y}\right)$, qui est la valeur

complette de z, telle qu'on l'auroit trouvée, si on eut intégré l'une ou l'autre des deux intégrales premieres.

Je proposerai pour dernier exemple d'intégrer l'équation $y^2 \frac{d^2 z}{dy^2} + 2xy \frac{d^2 z}{dx dy} + x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + hy \frac{dz}{dy} + hx \frac{dz}{dx} + iz = W$. On fera $A = y^2$, $B = 2xy$, $C = x^2$, $B' = hy$, $C' = hx$, $V = i$; &, à cause de $(yr + x)^2 = 0$, on aura $r = -\frac{x}{y}$, $b = \frac{x}{y}$; puis $\dot{A} = 2y$, $B(1) = xy$, $\dot{B}(1) = 2x$, $C'(1) = 0$; $B'(2) = (h-2)y$, $\dot{B}'(2) = h - 2$, $B'(3) = (h-4)y$, $C'(2) = 0$, $B(2) = 0$. Il ne restera qu'une seule équation de condition qui sera $(i - h + 2)\Psi - (h-4)y\dot{\Psi} + y^2\ddot{\Psi} = 0$. Je ferai $\ddot{\Psi} = K$, d'où $\dot{\Psi} = \int K' dy$, $\Psi = \int dy \int K' dy$; & par ces substitutions je changerai l'équation précédente en celle-ci, $(i - h + 2)\int dy \int K' dy - (h-4)y\int K' dy + y^2 K' = 0$, qui, lorsqu'on aura fait disparoître les signes d'intégration, deviendra $(i - 3h + 12)K' - (h-8)y\frac{dK'}{dy} + y^2 \frac{d^2 K'}{dy^2} = 0$, à laquelle on doit satisfaire en prenant $K' = y^\lambda$. En effet, λ se trouve être déterminé par l'équation du second degré $i - 3h + 12 - (h-7)\lambda + \lambda^2 = 0$, qui donne $\lambda = \frac{h-7}{2} \pm \sqrt{[(h-1)^2 - 4i]}$, ou $\lambda = \frac{h-7}{2} \pm \frac{i'}{2}$, en faisant pour abréger $\sqrt{[(h-1)^2 - 4i]} = i'$; donc $\dot{\Psi} = \frac{2}{h-5 \pm i'} y^{\frac{h-5}{2} \pm \frac{i'}{2}}$, $\Psi =$

$\frac{4}{(h-5\pm i')(h-3\pm i')}y^{\frac{h-3}{2}\pm\frac{i'}{2}}$. On aura pour intégrale complette $y\frac{dz}{dy}+x\frac{dz}{dx}+\frac{h-1\mp i'}{2}z+\frac{(h-5\pm i')(h-3\pm i')}{4}y^{\frac{-h+1}{2}\mp\frac{i'}{2}}F:\left(\frac{x}{y}\right)$ $=y^{\frac{-h+1}{2}\mp\frac{i'}{2}}\int Wy^{\frac{h-3}{2}\pm\frac{i'}{2}}dy$, à laquelle je puis donner cette forme plus simple $y\frac{dz}{dy}+x\frac{dz}{dx}+\frac{h-1\mp i'}{2}z+y^{\frac{-h+1}{2}\mp\frac{i'}{2}}F:\left(\frac{x}{y}\right)=$ $y^{\frac{-h+1}{2}\mp\frac{i'}{2}}\int Wy^{\frac{h-3}{2}\pm\frac{i'}{2}}dy$. J'ai donc, à cause de l'ambiguité du signe, ces deux intégrales premieres

$$y\frac{dz}{dy}+x\frac{dz}{dx}+\frac{h-1-i'}{2}z+y^{\frac{-h+1}{2}-\frac{i'}{2}}F:\left(\frac{x}{y}\right)=y^{\frac{-h+1}{2}-\frac{i'}{2}}\int Wy^{\frac{h-3}{2}+\frac{i'}{2}}dy,$$

$$y\frac{dz}{dy}+x\frac{dz}{dx}+\frac{h-1+i'}{2}z+y^{\frac{-h+1}{2}+\frac{i'}{2}}f:\left(\frac{x}{y}\right)=y^{\frac{-h+1}{2}+\frac{i'}{2}}\int Wy^{\frac{h-3}{2}-\frac{i'}{2}}dy,$$

qui, en éliminant $y\frac{dz}{dy}+x\frac{dz}{dx}$, me donnent $i'z+$ $y^{\frac{-h+1}{2}}\left(y^{\frac{i'}{2}}f:\left(\frac{x}{y}\right)-y^{-\frac{i'}{2}}F:\left(\frac{x}{y}\right)\right)=$ $y^{\frac{-h+1}{2}}\left(y^{\frac{i'}{2}}\int Wy^{\frac{h-3}{2}-\frac{i'}{2}}dy-y^{-\frac{i'}{2}}\int Wy^{\frac{h-3}{2}+\frac{i'}{2}}dy\right)$. Mais en intégrant l'équation $y\frac{dz}{dy}+x\frac{dz}{dx}+\frac{h-1\mp i'}{2}z+y^{\frac{-h+1}{2}\mp\frac{i'}{2}}F:\left(\frac{x}{y}\right)=y^{\frac{-h+1}{2}\mp\frac{i'}{2}}\int Wy^{\frac{h-3}{2}\pm\frac{i'}{2}}dy$, on

trouve $z = y^{\frac{-h+1}{2}} \left[y^{\pm \frac{i'}{2}} f:\left(\frac{x}{y}\right) \pm \frac{1}{i'} y^{\mp \frac{i'}{2}} F:\right.$ $\left(\frac{x}{y}\right) + y^{\pm \frac{i'}{2}} \int y^{\mp i' - 1} dy \int W y^{\frac{h-3}{2} \pm \frac{i'}{2}} dy \Big]$; de plus, $\int y^{\mp i' - 1} dy \int W y^{\frac{h-3}{2} \pm \frac{i'}{2}} dy = \frac{1}{\mp i'}$ $\left(y^{\mp i'} \int W y^{\frac{h-3}{2} \pm \frac{i'}{2}} dy - \int W y^{\frac{h-3}{2} \mp \frac{i'}{2}} dy \right)$; donc $i' z = y^{\frac{-h+1}{2}} \left[i' y^{\pm \frac{i'}{2}} f:\left(\frac{x}{y}\right) \pm y^{\mp \frac{i'}{2}} F:\right.$ $\left(\frac{x}{y}\right) \mp y^{\mp \frac{i'}{2}} \int W y^{\frac{h-3}{2} \pm \frac{i'}{2}} dy \pm$ $y^{\pm \frac{i'}{2}} \int W y^{\frac{h-3}{2} \mp \frac{i'}{2}} dy \Big]$. A cause de l'ambiguité du signe, on tirera de-là deux valeurs de z qui seront, comme on le verra aisément, identiquement la même chose, & coincideront avec celle qu'on a trouvée un peu plus haut. S'il arrivoit que i' fût une quantité imaginaire, on se serviroit des substitutions dont nous avons parlé dans beaucoup d'endroits de cet Ouvrage, & sur-tout dans les articles 49, 50 & 51; il pourroit aussi arriver que i' fût $=0$, alors l'intégrale premiere deviendroit $y \frac{dz}{dy} + x \frac{dz}{dx} + \frac{h-1}{2} z$ $+ y^{\frac{-h+1}{2}} F:\left(\frac{x}{y}\right) = y^{\frac{-h+1}{2}} \int W y^{\frac{h-1}{2}} dy$, & donneroit $z = y^{\frac{-h+1}{2}} \left(f:\left(\frac{x}{y}\right) - y F:\left(\frac{x}{y}\right) + \right.$ $\left. y \int W y^{\frac{h-3}{2}} dy - \int W y^{\frac{h-1}{2}} dy \right)$.

85. En général, soit $(B) + F:(\omega) = 0$ une équation aux différences partielles, de l'ordre $n-1$, entre

deux variables y & x, qui renferme une fonction arbitraire; pour trouver l'équation de l'ordre n dont elle est l'intégrale premiere complette, on mettra dans l'équation $\frac{d(B)}{dy} - r\frac{d(B)}{dx} = 0$, ou $r = \frac{d\omega}{dy} : \frac{d\omega}{dx}$, pour $\frac{d(B)}{dy}$ & $\frac{d(B)}{dx}$ leurs valeurs qu'on trouvera de la maniere suivante. On nommera z la fonction de y, x que (B) renferme avec ses différences partielles; on fera $\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}} = \alpha'$, $\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-2}dx} = \zeta'$ .... $\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} = \sigma'$; $\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}} = \alpha''$; $\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-3}dx} = \zeta''$ .... $\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} = \sigma''$; &c; & on aura

$$\frac{d(B)}{dy} = \frac{d(B)}{d\alpha'}\frac{d^nz}{dy^n} + \frac{d(B)}{d\zeta'}\frac{d^nz}{dy^{n-}dx} +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{d(B)}{d\sigma'}\frac{d^nz}{dydx^{n-1}} + \&c + \frac{d(B)}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{d(B)}{dy};$$

$$\frac{d(B)}{dx} = \frac{d(B)}{d\alpha'}\frac{d^nz}{dy^{n-1}dx} + \frac{d(B)}{d\zeta'}\frac{d^nz}{dy^{n-2}dx^2} +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{d(B)}{d\sigma'}\frac{d^nz}{dx^n} + \&c + \frac{d(B)}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{d(B)}{dx}.$$

Ces substitutions faites, il viendra l'équation (A) ....

$$\frac{d(B)}{d\alpha'}\frac{d^nz}{dy^n} + \left(\frac{d(B)}{d\zeta'} - r\frac{d(B)}{d\alpha'}\right)\frac{d^nz}{dy^{n-1}dx} +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left(\frac{d(B)}{d\sigma'}-r\frac{d(B)}{d\rho'}\right)\frac{d^n z}{dy\,dx^{n-1}}-r\frac{d(B)}{d\sigma'}\frac{d^n z}{dx^n}$$

$$+\frac{d(B)}{d\alpha''}\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}+\left(\frac{d(B)}{d\zeta''}-r\frac{d(B)}{d\alpha''}\right)\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-2}dx}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots-r\frac{d(B)}{d\rho''}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{d(B)}{dz}\frac{dz}{dy}-r\frac{d(B)}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{d(B)}{dy}-$$

$$r\frac{d(B)}{dx}=0,$$

qui a pour intégrale premiere complette $(B)+F:(\omega)=0$. Je vais faire usage de cette transformée pour trouver les cas où l'équation linéaire d'un ordre quelconque

$$A\frac{d^n z}{dy^n}+B\frac{d^n z}{dy^{n-1}dx}+C\frac{d^n z}{dy^{n-2}dx^2}+\ldots;$$

$$+S\frac{d^n z}{dy\,dx^{n-1}}+T\frac{d^n z}{dx^n}$$

$$+B'\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}+C'\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-2}dx}+\ldots;$$

$$+S'\frac{d^{n-1}z}{dy\,dx^{n-2}}+T'\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$$

$$+C''\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}}+\ldots.$$

$$+S''\frac{d^{n-2}z}{dy\,dx^{n-3}}+T''\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+S^{(n-1)'}\frac{dz}{dy}+T^{(n-1)'}\frac{dz}{dx}$$

$$+Vz=W,$$

dans laquelle les coefficiens des différences partielles, aussi bien que V & W, sont des fonctions quelconques de y & x, pour trouver, dis-je, le cas où cette équation a une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur.

Si on multiplie la proposée par un facteur Ψ, & qu'après cela on la compare à l'équation A, on aura premierement $\frac{d(B)}{d\alpha'} = \Psi A$, $\frac{d(B)}{d\beta'} - r \frac{d(B)}{d\alpha'} = \Psi B$ ....

$\frac{d(B)}{d\sigma'} - r \frac{d(B)}{d\rho'} = \Psi S$, $-r \frac{d(B)}{d\sigma'} = \Psi T$; d'où l'on tirera $\frac{d(B)}{d\alpha'} = \Psi A$, $\frac{d(B)}{d\beta'} = \Psi (Ar + B)$

....

$\frac{d(B)}{d\sigma'} = \Psi(Ar^{n-1} + Br^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + S)$;

& r sera donné par l'équation du degré n, $Ar^n + Br^{n-1} + Cr^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + Sr + T = 0$.

Pour trouver ω, on cherchera le facteur a propre à rendre $rdy + dx$ une différentielle exacte, & si l'on a $ardy + adx = db$, on trouvera $\omega = b$. Il se présente ici une remarque assez importante; c'est que la proposée étant linéaire ou non, pourvu que les coefficiens des plus hautes différences partielles ne soient fonctions que de x & y, on aura toujours une fonction de ces variables seulement pour l'arbitraire qui entrera dans l'intégrale complette.

Secondement $\frac{d(B)}{dy} - r \frac{d(B)}{dx}$ étant une fonction de l'ordre $n - 1$, je lui donne la forme suivante

$\alpha 1 \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} + \beta 1 \frac{d^{n-2} z}{dy^{n-2} dx} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$+\sigma 1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\alpha 2\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-2}}+\&c+\phi 1 z+X1;$

& je suppose

$\frac{d(B)}{d\alpha''}+\alpha 1=\Psi B', \frac{d(B)}{d\mathfrak{C}''}-r\frac{d(B)}{d\alpha''}+\mathfrak{C}1=\Psi C'$

....

$\frac{d(B)}{d\rho''}-r\frac{d(B)}{d\pi''}+\varrho 1=\Psi S', -r\frac{d(B)}{d\rho''}+$
$\sigma 1=\Psi T';$

$\frac{d(B)}{d\alpha'''}+\alpha 2=\Psi C''.....\frac{d(B)}{d\pi'''}-r\frac{d(B)}{do'''}+$
$\pi 2=\Psi S'', -r\frac{d(B)}{d\pi'''}+\varrho 2=\Psi T'';$

....

$\frac{d(B)}{dz}+\alpha n-1=\Psi S^{(n-1)'}, -r\frac{d(B)}{dz}+$
$\mathfrak{C}n-1=\Psi T^{(n-1)'}; \phi 1=\Psi V, X1=-\Psi W:$

d'où je tire évidemment

$\frac{d(B)}{d\alpha''}=\Psi B'-\alpha 1, \frac{d(B)}{d\mathfrak{C}''}=\Psi(B'r+C')-$
$\alpha 1 r-\mathfrak{C}1,$ ....

$\frac{d(B)}{d\rho''}=\Psi(B'r^{n-2}+C'r^{n-3}+.....+S')-$
$\alpha 1 r^{n-2}-\mathfrak{C}1 r^{n-3}-..........-\varrho 1;$

$\frac{d(B)}{d\alpha'''}=\Psi C''-\alpha 2.....\frac{d(B)}{d\pi'''}=\Psi(C''r^{n-3}+$

....

$+S'')-\alpha 2 r^{n-3}-............-\pi 2;$

$.............\frac{d(B)}{dz}=\Psi S^{(n-1)'}-\alpha n-1;$

& les n équations que voici,

$\Psi(B'r^{n-1}+C'r^{n-2}+\ldots\ldots\ldots+T')=$
$\alpha 1 r^{n-1}+\beta 1 r^{n-2}+\ldots\ldots+\sigma 1;$

$\Psi(C''r^{n-2}+\ldots\ldots\ldots+T'')=$
$\alpha 2 r^{n-2}+\beta 2 r^{n-3}+\ldots\ldots+\rho 2,$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\Psi(S^{(n-1)}r+T^{(n-1)})=\alpha n-1 r+\beta n-1,$

$\Psi V=\phi 1.$

Je fais pour abréger

$Ar+B=B(1),$
$Ar^2+Br+C=C(1),$
&c

$B'r+C'=C'(1),$
$B'r^2+C'r+D'=D'(1),$
&c

$C''r+D''=D''(1),$
$C''r^2+D''r+E''=E''(1),$
&c, &c;

$\frac{dA}{dy}-r\frac{dA}{dx}=\dot{A}$, &c, $\frac{d\Psi}{dy}-r\frac{d\Psi}{dx}=\dot{\Psi};$

$\frac{d\dot{\Psi}}{dy}-r\frac{d\dot{\Psi}}{dx}=\ddot{\Psi}$, &c.

Cela posé, si le facteur Ψ ne doit être fonction que des seules variables y & x, on a

$\Psi(A\alpha'+B(1)\beta'+\ldots\ldots\ldots+S(1)\sigma'),$

pour la somme de tous les termes de (B) qui renferment des différences partielles de l'ordre $n-1$; donc $\alpha 1=\dot{A}\Psi+A\dot{\Psi}$, $\beta 1=\dot{B}(1)\Psi+B(1)\dot{\Psi}\ldots,$ $\sigma 1=\dot{S}(1)\Psi+S(1)\dot{\Psi}$; & par conséquent

$[(B' - \dot{A})\Psi - A\dot{\Psi}]\alpha'' + [(C'(1) - \dot{A}r - \dot{B}(1))\Psi$
$- (Ar + B(1))\dot{\Psi}]\mathit{6}'' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$
$[(S'(1) - \dot{A}r^{n-2} - \dot{B}(1)r^{n-3} - \ldots\ldots\ldots -$
$\dot{R}(1))\Psi - (Ar^{n-2} + B(1)r^{n-3} + \ldots\ldots\ldots$
$+ R(1))\dot{\Psi}]\varrho''$ eſt la ſomme de tous les termes de ($\mathfrak{B}$) qui renferment les différences partielles de l'ordre $n-2$. En continuant toujours de même, on trouvera, après avoir fait pour abréger,

$Ar + B(1) = B(2)$,
$Ar^2 + B(1)r + C(1) = C(2)$,
&c

$Ar + B(2) = B(3)$,
$Ar^2 + B(2)r + C(2) = C(3)$,
&c

$Ar + B(3) = B(4)$
$Ar^2 + B(3)r + C(3) = C(4)$, &c
&c

$B' - \dot{A} = B'(2)$,
$C'(1) - \dot{A}r - \dot{B}(1) = C'(2)$
$D'(1) - \dot{A}r^2 - \dot{B}(1)r - \dot{C}(1) = D'(2)$
&c

$C'' - \dot{B}'(2) = C''(2)$,
$D''(1) - \dot{B}'(2)r - \dot{C}'(2) = D''(2)$,
$E''(1) - \dot{B}'(2)r^2 - \dot{C}'(2)r - \dot{D}'(2) = E''(2)$,
&c

$D''' - \dot{C}''(2) = D'''(2)$,

$E'''(1) - \dot{C}''(2)r - \dot{D}''(2) = E'''(2)$,

$F'''(1) - \dot{C}''(2)r^2 - \dot{D}''(2)r - \dot{E}''(2) = F'''(2)$, &c

&c

$B'(2) - \dot{A} = B'(3)$,

$(B'(2) - \dot{A})r + C'(2) - \dot{B}(2) = C'(3)$,

$(B'(2) - \dot{A})r^2 + (C'(2) - \dot{B}(2))r + D'(2) - \dot{C}(2) = D'(3)$,

&c

$B'(3) - \dot{A} = B'(4)$,

$(B'(3) - \dot{A})r + C'(3) - \dot{B}(3) = C'(4)$,

$(B'(3) - \dot{A})r^2 + (C'(3) - \dot{B}(3))r + D'(3) - \dot{C}(3) = D'(4)$, &c

&c.

$C''(2) - \dot{B}'(3) = C''(3)$,

$(C''(2) - \dot{B}'(3))r + D''(2) - \dot{C}'(3) = D''(3)$;

$(C''(2) - \dot{B}'(3))r^2 + (D''(2) - \dot{C}'(3))r + E''(2) - \dot{D}'(3) = E''(3)$,

&c

$C''(3) - \dot{B}'(4) = C''(4)$,

$(C''(3) - \dot{B}'(4))r + D''(3) - \dot{C}'(4) = D''(4)$;

$(C''(3) - \dot{B}'(4))r^2 + (D''(3) - \dot{C}'(4))r + E''(3) - \dot{D}'(4) = E''(4)$, &c

&c

$D'''(2) - \dot{C}''(3) = D'''(3)$,

$(D'''(2) - \dot{C}''(3))r + E'''(2) - \dot{D}''(3) = E'''(3)$;

$(D'''(2) - \dot{C}''(3))r^2 + (E'''(2) - \dot{D}''(3))r +$
$F'''(2) - \dot{E}''(3) = F'''(3)$,

&c

$D'''(3) - \dot{C}''(4) = D'''(4)$,

$(D'''(3) - \dot{C}''(4))r + E'''(3) - \dot{D}''(4) = E'''(4)$,

$(D'''(3) - \dot{C}''(4))r^2 + (E'''(3) - \dot{D}''(4))r +$
$F'''(3) - \dot{E}''(4) = F'''(4)$, &c

&c

&c; on trouvera, dis-je, que la somme des termes de (B) qui renferment z & ses différences partielles, est égale à (Σ)........................

$$\Psi \left(A \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} + B(1) \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1} dx} + C(1) \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-3} dx^2} + \ldots + S(1) \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} \right) + (B'(2)\Psi - A\dot{\Psi}) \frac{d^{n-2} z}{dy^{n-2}} + (C'(2)\Psi - B(2)\dot{\Psi}) \frac{d^{n-2} z}{dy^{n-3} dx} + \ldots\ldots + (S'(2)\Psi - R(2)\dot{\Psi}) \frac{d^{n-} z}{dx^{n-2}} + (C''(2)\Psi - B'(3)\dot{\Psi} + A\ddot{\Psi}) \frac{d^{n-3} z}{dy^{n-3}} + (D''(2)\Psi - C'(3)\dot{\Psi} + B(3)\ddot{\Psi}) \frac{d^{n-3} z}{dy^{n-4} dx} + \ldots\ldots + (S''(2)\Psi - R'(3)\dot{\Psi} + Q(3)\ddot{\Psi}) \frac{d^{n-3} z}{dx^{n-3}} + (D'''(2)\Psi -$$

$(D'''(2)\Psi - C''(3)\dot{\Psi} + B'(4)\ddot{\Psi} A - \dddot{\Psi})\frac{d^{n-4}z}{dy^{n-4}} +$

$(E'''(2)\Psi - D''(3)\dot{\Psi} + C'(4)\ddot{\Psi} - B(4)\dddot{\Psi})$
$\frac{d^{n-4}z}{dy^{n-5}dx} + \ldots\ldots\ldots + (S'''(2)\Psi - R''(3)\dot{\Psi} +$
$Q'(4)\ddot{\Psi} - P(4)\dddot{\Psi})\frac{d^{n-4}z}{dx^{n-4}} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$+ (R^{(n-2)'}(2)\Psi - Q^{(n-3)'}(3)\dot{\Psi} + \ldots\ldots \pm$
$B'(n-1)\overset{(.)n-3}{\Psi} \mp A\overset{(.)n-2}{\Psi} \quad)\frac{dz}{dy} +$

$(S^{(n-2)'}(2)\Psi - R^{(n-3)'}(3)\dot{\Psi} + \ldots\ldots \pm$
$C'(n-1)\overset{(.)n-3}{\Psi} \mp B(n-1)\overset{(.)n-2}{\Psi} \quad)\frac{dz}{dx} +$

$(S^{(n-1)'}(2)\Psi - R^{(n-2)'}(3)\dot{\Psi} + \ldots\ldots \mp$
$B'(n) \quad \overset{(.)n-2}{\Psi} \quad \pm A\overset{(.)n-1}{\Psi} \quad)z.$

Quant au terme de (B) qui n'eſt fonction que de x, y, nommons-le X; &, à cauſe de $\frac{dX}{dy} - r\frac{dX}{dx} = X1 = -\Psi W$, nous aurons $X = -\int \Psi W dy$, en faiſant attention qu'avant d'intégrer par rapport à y, il faudra mettre dans ΨW pour x ſa valeur en y & b tirée de l'équation $\int(ardy + adx) = b$.

Nous avons trouvé plus haut $\alpha 1$, $\beta 1$, &c; par un procédé ſemblable on parviendra à connoître $\alpha 2$, $\beta 2 \ldots \varphi 1$; & en ſubſtituant ces valeurs dans les n équations dont il étoit queſtion il n'y a qu'un moment, on aura

$T'(2)\Psi - S(2)\dot{\Psi} = 0,$

$T''(2)\Psi - S'(3)\dot{\Psi} + R(3)\ddot{\Psi} = 0,$

Tt

$$T'''(2)\Psi - S''(3)\dot{\Psi} + R'(4)\ddot{\Psi} - Q(4)\dddot{\Psi} = 0;$$

. . . .

$$T^{(n-1)\prime}(2)\Psi - S^{(n-2)\prime}(3)\dot{\Psi} + R^{(n-3)\prime}(4)\ddot{\Psi} -$$

. . . .

$$\pm C'(n)\overset{(.)n-2}{\Psi} \mp B(n)\overset{(.)n-1}{\Psi} = 0,$$

$$(V - \dot{S}^{(n-1)\prime}(2))\Psi - S^{(n-1)\prime}(3)\dot{\Psi} + R^{(n-2)\prime}(4)\ddot{\Psi} -$$

. . . .

$$\mp B'(n+1)\overset{(.)n-1}{\Psi} \pm A\overset{(.)n}{\Psi} = 0:$$

une de ces équations servira à déterminer le facteur Ψ, & les $n-1$ restantes seront les équations de condition qui devront avoir lieu en même-tems, pour que la proposée ait une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur.

Si je fais $\overset{(.)n}{\Psi} = K$, j'aurai $\overset{(.)n-1}{\Psi} = \int K'dy$ (K' étant ce que devient K lorsqu'on met pour x sa valeur en y & b) $\overset{(.\,n-2}{\Psi} = \int dy \int K'dy$, &c; par-là je réduirai la derniere des équations précédentes, qui est celle de l'ordre le plus élevé, à une équation linéaire de cette forme, $\alpha K' + \beta \frac{dK'}{dy} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varphi \frac{d^n K'}{dy^n} = 0$, ou α, β, &c, seront fonctions de y & b, & que je traiterai comme étant aux différences ordinaires, puisque pour satisfaire à cette équation je puis regarder b comme constant. Je transformerai les autres équations de la même maniere; & il sera clair que le Problême de trouver l'intégrale premiere complette d'une équation linéaire aux différences partielles, pourra toujours se réduire à satisfaire à une équation linéaire aux différences ordinaires, qui ne

fera jamais d'un ordre plus élevé que la proposée. Cela fait, cette intégrale premiere complette sera $\Sigma + F:(b) = \int \psi W dy$.

Je ne détaillerai pas tous les cas où il est possible de trouver plusieurs de ces intégrales premieres, comme par exemple lorsque l'équation du degré n qui renferme r a des racines inégales qui satisfont aux conditions. En voici encore un dont je ne parlerai que pour rappeller ce que nous avons démontré dans les articles 49, 50 & 51. Dans ce cas on n'a qu'une seule valeur de r, & toutes les équations de condition sont nulles d'elles-mêmes, excepté la derniere qui est de l'ordre n. Alors si on parvenoit à intégrer complettement cette derniere équation, on auroit, en faisant successivement dans l'intégrale trouvée toutes les constantes arbitraires moins une égales à zero, n valeurs de ψ qui donneroient n intégrales premieres complettes de la proposée. Nous allons faire usage des formules précédentes pour intégrer quelques équations particulieres qui ont déja été résolues de différentes manieres.

86. M. Euler, dans le troisiéme volume de son Calcul Intégral, ne s'occupe guère, au-delà du second ordre, que des équations qu'il appelle homogènes, & qu'on peut toutes représenter par

$$\frac{d^n z}{dy^n} + a\frac{d^n z}{dy^{n-1}dx} + b\frac{d^n z}{dy^{n-2}dx^2} + \ldots\ldots + i\frac{d^n z}{dx^n} = W,$$

dans laquelle $a, b \ldots\ldots i$ sont constans, & W une fonction quelconque de x, y. On trouvera premierement que dans cet exemple r est une quantité constante donnée par l'équation $r^n + ar^{n-1} + br^{n-2}$

$+ \ldots\ldots + i = 0$, & que par conſéquent $b = ry + x$. Secondement, que les n équations de condition ſe réduiſent à celles-ci, $\dot{\Psi} = 0$, $\ddot{\Psi} = 0 \ldots\ldots \overset{(.)n}{\Psi} = 0$; or comme $\Psi = 1$ ſatisfait à toutes, on peut ſuppoſer le facteur égal à 1. Donc, quelles que ſoient les conſtantes $a, b \ldots\ldots i$ & la fonction W, on aura pour l'intégrale premiere complette de la propoſée

$$\frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} + (r + a)\frac{d^{n-1} z}{dy^{n-2} dx} + (r^2 + ar + b)\frac{d^{n-1} z}{dy^{n-3} dx^2} + \ldots\ldots + (r^{n-1} + ar^{n-2} + br^{n-3} + \ldots\ldots + h)\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + F:(ry + x) = \int W dy;$$

il ne faudra pas oublier qu'avant d'intégrer Wdy par rapport à y, on doit mettre dans W pour x la valeur $b - ry$.

Il eſt clair que ſi toutes les racines de l'équation qui renferme r étoient inégales, on auroit n intégrales premieres complettes, & par conſéquent la valeur complette de z. Suppoſons, pour en donner un exemple, que la propoſée ſoit $\frac{d^3 z}{dy^3} + a\frac{d^3 z}{dy^2 dx} + b\frac{d^3 z}{dy dx^2} + c\frac{d^3 z}{dx^3} = 0$; nous aurons, en nommant $r1, r2, r3$ les racines de l'équation $r^3 + ar^2 + br + c = 0$, qui par l'hypothèſe ſont inégales, nous aurons, dis-je, ces trois intégrales premieres

$$\frac{d^2 z}{dy^2} + (r1 + a)\frac{d^2 z}{dy dx} + (r^2 1 + ar1 + b)\frac{d^2 z}{dx^2} + F:(r1y + x) = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dy^2}+(r2+a)\frac{d^2z}{dydx}+(r^2 2+ar2+b)\frac{d^2z}{dx^2}$$
$$+f:(r2y+x)=0,$$
$$\frac{d^2z}{dy^2}+(r3+a)\frac{d^2z}{dydx}+(r^2 3+ar3+b)\frac{d^2z}{dx^2}$$
$$+\phi:(r3y+x)=0;$$

d'où nous tirerons, en éliminant $\frac{d^2z}{dy^2}$,

$$(r1-r2)\frac{d^2z}{dydx}+(r1-r2)(r1+r2+a)$$
$$\frac{d^2z}{dx^2}+F:(r1y+x)-f:(r2y+x)=0,$$
$$(r1-r3)\frac{d^2z}{dydx}+(r1-r3)(r1+r3+a)$$
$$\frac{d^2z}{dx^2}+F:(r1y+x)-\phi:(r3y+x)=0;$$

& en éliminant $\frac{d^2z}{dydx}$,

$$(r2-r3)\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{F:(r1y+x)-f:(r2y+x)}{r1-r2}-$$
$$\frac{F:(r1y+x)-\phi:(r3y+x)}{r1-r3}=0,$$

équation à laquelle nous pouvons donner cette forme plus simple,

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\Gamma'':(r1y+x)+\Delta'':(r2y+x)+\Sigma'':$$
$$(r3y+x).$$

Donc $z=\Gamma:(r1y+x)+\Delta:(r2y+x)+\Sigma:$ $(r3y+x)$ est la valeur complette de z dans l'équation du troisiéme ordre proposée.

On trouvera toujours autant d'intégrales premieres

complettes que de racines inégales; lorsque le nombre n'en sera pas suffisant pour avoir la valeur complette de z, on aura recours aux intégrations successives. Ainsi pour intégrer l'équation homogène de l'ordre n dans le cas où toutes les valeurs de r seroient égales; je commencerai par remarquer que dans cette hypothèse l'équation qui renferme r peut être représentée par $(r+q)^n=0$, & que l'intégrale trouvée plus haut doit prendre la forme suivante

$$\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}+(n-1).q\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-2}dx}+\frac{(n-1).(n-2)}{1.2}q^2\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-3}dx^2}+\&c+F:(-qy+x)=\int W dy.$$

Pour passer à l'intégrale de l'ordre immédiatement inférieur; soit une quantité r' donnée par l'équation $r'^{n-1}+(n-1).qr'^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}q^2r'^{n-3}+\&c=0$, qui n'étant autre que $(r'+q)^{n-1}=0$, donne $r'=-q$. Ainsi la fonction arbitraire qu'il faudra ajouter dans cette seconde intégration sera $f:(-qy+x)$; nous trouverons de même $\phi:(-qy+x)$; pour celle qu'il faudra ajouter dans la troisiéme intégration; & ainsi des autres. Quant aux intégrales successives, elles seront

$$\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}}+(n-2).q\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-3}dx}+\frac{(n-2).(n-3)}{1.2}q^2\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-4}dx^2}+\&c+\int dy F:(-qy+x)+f:(-qy+x)=\int dy\int W dy,$$

$$\frac{d^{n-3}z}{dy^{n-3}}+(n-3).q\frac{d^{n-3}z}{dy^{n-4}dx}+\frac{(n-3).(n-4)}{1.2}q^2\frac{d^{n-3}z}{dy^{n-5}dx^2}+\&c+\int dy\int dy F:(-qy+x)+$$

$\int dy f:(-qy+x)+\phi:(-qy+x)=\int dy\int dy\int W dy.$
Il est donc démontré que dans le cas que nous examinons la valeur complette de z est

$z=\int \ldots \int dy\int W dy+y^{n-1}F(1):(-qy+x)+$
$y^{n-2}F(2):(-qy+x)+\ldots\ldots\ldots+F(n):$
$(-qy+x);$

par $F(1)$, $F(2)\ldots F(n)$ nous entendons n fonctions différentes de la même quantité $-qy+x$.

Maintenant soit cette autre équation

$$A\frac{d^n z}{dy^n}+B'\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}+C''\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}}+\ldots\ldots+$$
$$Vz=W,$$

dans laquelle A, B', $C'\ldots V$ & W sont des fonctions quelconques de y & x. Il est clair qu'on a $r=0$ & $b=x$; que

$$B'(2)=B'-\frac{dA}{dy},$$

$$C''(2)=C''-\frac{dB'}{dy}+\frac{d^2A}{dy^2},$$

$$D'''(2)=D'''-\frac{dC''}{dy}+\frac{d^2B'}{dy^2}-\frac{d^3A}{dy^3}, \&c;$$

$$B'(3)=B'-2\frac{dA}{dy},$$

$$C''(3)=C''-2\frac{dB'}{dy}+3\frac{d^2A}{dy^2},$$

$$D'''(3)=D'''-2\frac{dC'}{dy}+3\frac{d^2B'}{dy^2}-4\frac{d^3A}{dy^3}, \&c;$$

$$B'(4)=B'-3\frac{dA}{dy},$$

$$C''(4) = C' - 3\frac{dB'}{dy} + 6\frac{d^2A}{dy^2}$$

$$D'''(4) = D''' - 3\frac{dC''}{dy} + 6\frac{d^2B'}{dy^2} - 10\frac{d^3A}{dy^3}, \&c, \&c.$$

La propofée a donc pour intégrale premiere complette

$$A\Psi\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}} + \left(\left(B' - \frac{dA}{dy}\right)\Psi - A\frac{d\Psi}{dy}\right)\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}}$$
$$+ \left(\left(C'' - \frac{dB'}{dy} + \frac{d^2A}{dy^2}\right)\Psi - \left(B' - 2\frac{dA}{dy}\right)\frac{d\Psi}{dy}\right.$$
$$\left. + A\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)\frac{d^{n-3}z}{dy^{n-3}} + \left(\left(D''' - \frac{dC''}{dy} + \frac{d^2B'}{dy^2} - \right.\right.$$
$$\left.\frac{d^3A}{dy^3}\right)\Psi - \left(C'' - 2\frac{dB'}{dy} + 3\frac{d^2A}{dy^2}\right)\frac{d\Psi}{dy} +$$
$$\left.\left(B' - 3\frac{dA}{dy}\right)\frac{d^2\Psi}{dy^2} - A\frac{d^3\Psi}{dy^3}\right)\frac{d^{n-4}z}{dy^{n-4}} + \&c +$$
$$F:(x) = \int \Psi W dy.$$

Ψ étant donné par l'équation

$$\left(V - \frac{dS^{(n-1)'}}{dy} + \frac{d^2R^{(n-2)'}}{dy^2} - \frac{d^3Q^{(n-3)'}}{dy^3}\right.$$
$$\left. + \frac{d^4P^{(n-4)'}}{dy^4} - \&c\right)\Psi - \left(S^{(n-1)'} - 2\frac{dR^{(n-2)'}}{dy}\right.$$
$$\left. + 3\frac{d^2Q^{(n-3)'}}{dy^2} - 4\frac{d^3P^{(n-4)'}}{dy^3} + \&c\right)\frac{d\Psi}{dy} +$$
$$\left(R^{(n-2)'} - 3\frac{dQ^{(n-3)'}}{dy} + 6\frac{d^2P^{(n-4)'}}{dy^2} - \&c\right)$$
$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} - \&c = 0.$$

J'intégrerai cette équation en la multipliant par un facteur K qui fera renfermé dans l'équation

$$A\frac{d^nK}{dy^n}+B'\frac{d^{n-1}K}{dy^{n-1}}+C''\frac{d^{n-2}K}{dy^{n-2}}+\ldots\ldots+$$
$$Vz=0,$$

qui n'eſt autre que la propoſée dans laquelle on auroit fait $W=0$. Donc pour avoir une des intégrales premieres complettes de la propoſée, il ſuffira de trouver une valeur de z qui, en regardant x comme conſtant, ſatisfaſſe à cette équation dans le cas de $W=0$. Si on avoit n valeurs de z; ou bien ſi dans le cas de $W=0$, on parvenoit à intégrer complettement la propoſée, en regardant toujours x comme conſtant, c'eſt-à-dire en traitant cette équation comme étant aux différences ordinaires; ſi, dis-je, on parvenoit à l'une de ces deux choſes, on en tireroit aiſément par de ſimples éliminations la valeur complette de z. Voici encore un exemple qui achevera d'éclaircir la théorie précédente.

On demande l'intégrale premiere complette de l'équation du troiſiéme ordre,

$$y^3\frac{d^3z}{dy^3}+3xy^2\frac{d^3z}{dy^2dx}+3x^2y\frac{d^3z}{dydx^2}+x^3\frac{d^3z}{dx^3}=W,$$
$$+hy^2\frac{d^2z}{dy^2}+2hxy\frac{d^2z}{dxdy}+hx^2\frac{d^2z}{dx^2}$$
$$+iy\frac{dz}{dy}+ix\frac{dz}{dx}$$
$$+Kz$$

A cauſe de $A=y^3$, $B=3xy^2$, $C=3x^2y$, $D=x^3$, r ſera donné par l'équation $(yr+x)^3=0$, d'où l'on tirera $r=\frac{-x}{y}$, & par conſéquent $b=\frac{x}{y}$. On fera enſuite $B'=hy^2$, $C'=2hxy$, $D'=hx^2$, $C''=iy$, $D''=ix$, $V=K$; puis on aura $B(1)=2xy^2$, $C(1)=x^2y$, $D(1)=0$, $C'(1)=hxy$, $D'(1)=0$,

$B(2)=xy^2$, $C(2)=0$, $B(3)=0$, $B'(2)=(h-3).y^2$, $C'(2)=(h-3).xy$, $D'(2)=0$, $C''(2)=(i-2.(h-3))y$, $D''(2)=0$, $B'(3)=(h-6)y^2$, $C'(3)=0$, $D'''(2)=K-i+2(h-3)$, $C''(3)=(i-2.(2h-9))y$, $B'(4)=(h-9)y^2$.
Ainsi l'intégrale premiere complette de la proposée sera

$$\Psi\left(y^3\frac{d^2z}{dy^2}+2xy^2\frac{d^2z}{dydx}+x^2y\frac{d^2z}{dx^2}\right)+ ((h-3).y^2.\Psi-y^3\dot{\Psi})\frac{dz}{dy}+((h-3).xy\Psi- xy^2\dot{\Psi})\frac{dz}{dx}+((i-2.(h-3))y\Psi-(h-6)y^2\dot{\Psi}+ y^3\ddot{\Psi})z+F:\left(\frac{x}{y}\right)=\int\Psi W dy;$$

Ψ étant donné par l'équation du troisiéme ordre,

$$(K-i+2(h-3))\Psi-(i-2.(2h-9))y.\dot{\Psi}+ (h-9)y^2\ddot{\Psi}-y^3\dddot{\Psi}=0.$$

On trouvera que $\Psi=y^\mu$, μ étant une des racines de l'équation du troisiéme degré, $K-i+2(h-3)-(i-3h+11)\mu+(h-6)\mu^2-\mu^3=0$; & on aura pour intégrale premiere complette de la proposée

$$y^2\frac{d^2z}{dy^2}+2xy\frac{d^2z}{dxdy}+x^2\frac{d^2z}{dx^2}+(h-\mu-3)\left(y\frac{dz}{dy}+x\frac{dz}{dx}\right)+(i-2(h-3)-(h-5)\mu+ \mu^2)z+y^{-\mu-1}F:\left(\frac{x}{y}\right)=y^{-\mu-1}\int Wy^\mu dy,$$

équation qui est précisément de la forme de celle dont nous nous sommes occupés à la fin de l'article 84.

J'ai regardé le facteur Ψ comme ne devant ren-

fermer que x & y, & par conséquent j'ai supposé qu'une équation linéaire devoit nécessairement avoir pour intégrale de l'ordre immédiatement inférieur une équation linéaire; voici une démonstration bien simple de cette proposition. On a $(B) = A\int \psi d\alpha' + B(1)\int \psi d\zeta' + \ldots\ldots\ldots + S(1)\int \psi d\sigma' + \delta$, δ ne pouvant renfermer que des différences partielles de l'ordre $n-2$; donc $\frac{d(B)}{dy} - r\frac{d(B)}{dx} =$ $\dot{A}\int \psi d\alpha' + \dot{B}(1)\int \psi d\zeta' + \ldots\ldots + \dot{S}(1)\int \psi d\sigma' + \dot{\delta} +$ une suite de termes $A\left(\frac{d\int \psi d\alpha'}{dy} - r\frac{d\int \psi d\alpha'}{dx}\right)$ $+ B(1)\left(\frac{d\int \psi d\zeta'}{dy} - r\frac{d\int \psi d\zeta'}{dx}\right) + \ldots\ldots\ldots +$ $\dot{S}(1)\left(\frac{d\int \psi d\sigma'}{dy} - r\frac{d\int \psi d\sigma'}{dx}\right)$ que je désignerai par K. Or toutes les différences partielles de l'ordre n doivent se trouver dans K, & elles doivent s'y trouver sous une forme linéaire, ce qui évidemment ne pourroit pas être, si ψ en renfermoit de l'ordre $n-1$; donc le facteur ψ ne peut pas renfermer de différences partielles de l'ordre $n-1$. On démontreroit de la même maniere qu'il ne peut pas renfermer de différences partielles de l'ordre $n-2$, ni celles de l'ordre $n-3$, &c; & enfin qu'il doit être fonction de x, y seulement. Je passe aux équations entre trois variables; je veux dire celles où l'indéterminée z est fonction de trois variables u, x & y.

87. J'imagine que $(B) + F:(\omega, \omega 1) = 0$ soit l'intégrale premiere complette d'une équation aux différences partielles de l'ordre n entre trois variables y, x & u, que je trouverai en différentiant successivement cette intégrale par rapport à chacune des trois

variables. Ainsi, en représentant par $(\Gamma d\omega + \Gamma\Delta d\omega 1)$ $F':(\omega, \omega 1)$ la différentielle de $F:(\omega, \omega 1)$, j'aurai ces trois équations $\frac{d(B)}{dy} + \left(\Gamma \frac{d\omega}{dy} + \Gamma\Delta \frac{d\omega 1}{dy}\right)$ $F':(\omega, \omega 1) + o$, $\frac{d(B)}{dx} + \left(\Gamma \frac{d\omega}{dx} + \Gamma\Delta \frac{d\omega 1}{dx}\right)$ $F':(\omega, \omega 1) = o$, $\frac{d(B)}{du} + \left(\Gamma \frac{d\omega}{du} + \Gamma\Delta \frac{d\omega 1}{du}\right)$ $F':(\omega, \omega 1)) = o$. Je ferai $\frac{d\omega}{dy} : \frac{d\omega}{dx} = r$, & après avoir multiplié la seconde équation par r, & l'avoir ôtée de la premiere, il viendra $\frac{d(B)}{dy} - r \frac{d(B)}{dx} +$ $\Gamma\Delta \left(\frac{d\omega 1}{dy} - r \frac{d\omega 1}{dx}\right) F':(\omega, \omega 1) = o$. Je ferai aussi $\frac{d\omega 1}{dy} : \frac{d\omega 1}{du} = s$, & après avoir multiplié la troisiéme équation par s, je l'ôterai de la précédente, d'où je tirerai $\frac{d(B)}{dy} - r \frac{d(B)}{dx} - s \frac{d(B)}{du} -$ $\Gamma \left(\Delta r \frac{d\omega 1}{dx} + s \frac{d\omega}{du}\right) F':(\omega, \omega 1) = o$. Cette équation ne doit pas renfermer de fonction arbitraire, on a donc nécessairement $\Delta r \frac{d\omega 1}{dx} + s \frac{d\omega}{du} = o$; & comme Δ ne doit prendre aucune valeur, il faut que $\frac{d\omega 1}{dx} = o$, $\frac{d\omega}{du} = o$. J'aurois pu faire $\frac{d\omega 1}{dx}$: $\frac{d\omega 1}{du} = -s$, ce qui m'auroit donné $\frac{d(B)}{dy} -$ $r \frac{d(B)}{dx} - rs \frac{d(B)}{du} + \Gamma \left(\Delta \frac{d\omega 1}{dy} - rs \frac{d\omega}{du}\right) F':$

$(\omega, \omega 1) = 0$, d'où j'aurois tiré que $\Delta \frac{d\omega 1}{dy} - rs \frac{d\omega}{du}$ doit être nul, sans que Δ prenne aucune valeur, & que par conséquent $\frac{d\omega 1}{dy} = 0$, $\frac{d\omega}{du} = 0$.

En général, soit $\frac{d(B)}{dy} - r \frac{d(B)}{dx} - t \frac{d(B)}{du} = 0$ l'équation qui a pour intégrale premiere complette $(B) + F:(\omega, \omega 1) = 0$. Si l'on fait

$$\frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} = \alpha', \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-2} dx} = \epsilon'_{,} \ldots \ldots \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} = \sigma';$$

$$\frac{d^{n-2} z}{dy^{n-2}} = \alpha'', \text{ \&c; \&c:}$$

$$\frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2} du} = \epsilon'_{,} \ldots \ldots \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-2} du} = \sigma'_{,}$$

$$\frac{d^{n-1} z}{dy^{n-3} du^2} = \sigma'_{,,}$$

&c

à cause de $\frac{d(B)}{dy} = \frac{d(B)}{d\alpha'} \frac{d^n z}{dy^n} + \text{\&c}$, $\frac{d(B)}{dx} = \frac{d(B)}{d\alpha'} \frac{d^n z}{dy^{n-1} dx} + \text{\&c}$, $\frac{d(B)}{du} = \frac{d(B)}{d\alpha'} \frac{d^n z}{dy^{n-1} du} + \text{\&c}$;

l'équation précédente deviendra (A) . . . .

$$\frac{d(B)}{d\alpha'} \frac{d^n z}{dy^n} + \left(\frac{d(B)}{d\epsilon'} - r \frac{d(B)}{d\alpha'}\right) \frac{d^n z}{dy^{n-1} dx} + \left(\frac{d(B)}{d\gamma'} - r \frac{d(B)}{d\epsilon'}\right) \frac{d^n z}{dy^{n-2} dx^2} + \ldots$$

$$+\left(\frac{d(B)}{d\beta'_{,}}-t\frac{d(B)}{d\alpha'}\right)\frac{d^n z}{dy^{n-1}du}+$$

$$+\left(\frac{d(B)}{d\gamma'_{,}}-r\frac{d(B)}{d\beta'_{,}}-t\frac{d(B)}{d\beta'}\right)\frac{d^n z}{dy^{n-2}dxdu}$$

$$\left(\frac{d(B)}{d\gamma'_{,,}}-t\frac{d(B)}{d\beta'_{,}}\right)\frac{d^n z}{dy^{n-2}du^2}$$

$$+\left(\frac{d(B)}{d\varepsilon'}-r\frac{d(B)}{d\rho'}\right)\frac{d^n z}{dydx^{n-1}}-$$

$$r\frac{d(B)}{d\sigma'}\frac{d^n z}{dx^n}+\frac{d(B)}{d\alpha''}\frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}}$$

$$-\left(r\frac{d(B)}{d\sigma'_{,}}+\right.$$

$$\left.t\frac{d(B)}{d\sigma'}\right)\frac{d^n z}{dx^{n-1}du}$$

$$-\left(r\frac{d(B)}{d\sigma'_{,,}}+\right.$$

$$\left.t\frac{d(B)}{d\sigma'_{,}}\right)\frac{d^n z}{dx^{n-2}du^2}$$

&c

$$+\left(\frac{d(B)}{d\beta''}-r\frac{d(B)}{d\alpha''}\right)\frac{d^{n-1} z}{dy^{n-2}dx}+\ldots\ldots\ldots$$

$$-r\frac{d(B)}{d\rho''}\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left(\frac{d(B)}{d\beta''_{,}}-t\frac{d(B)}{d\alpha''}\right)\frac{d^{n-1} z}{dy^{n-2}du}+\ldots\ldots\ldots$$

$$-\left(r\frac{d(B)}{d\rho''_{,}}+t\frac{d(B)}{d\rho''}\right)\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-2}du}$$

&c

$$+\frac{d(B)}{dz}\frac{dz}{dy}-r\frac{d(B)}{dz}\frac{dz}{dx}-t\frac{d(B)}{dz}\frac{dz}{du}+$$

$$\frac{d(B)}{dy}-r\frac{d(B)}{dx}-t\frac{d(B)}{du}=0.$$

Pour donner un exemple de l'ufage qu'on peut faire de cette transformée, nous allons chercher par fon moyen les cas d'intégrabilité de l'équation de l'ordre n

$$A\frac{d^n z}{dy^n}+B\frac{d^n z}{dy^{n-1}dx}+C\frac{d^n z}{dy^{n-2}dx^2}+\ldots\ldots$$
$$+T\frac{d^n z}{dx^n}$$
$$+B_{,}\frac{d^n z}{dy^{n-1}du}+C_{,}\frac{d^n z}{dy^{n-2}dx\,du}+\ldots\ldots$$
$$+T_{,}\frac{d^n z}{dx^{n-1}du}$$
$$+C_{,,}\frac{d^n z}{dy^{n-2}du^2}+\ldots\ldots$$
$$+T_{,,}\frac{d^n z}{dx^{n-2}du^2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+B'\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}+C'\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-2}dx}+\ldots\ldots$$
$$+T'\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$$
$$+C'_{,}\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-2}du}+\ldots\ldots$$
$$+T'_{,}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-2}du}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+S^{(n-1)'}\frac{dz}{dy}+T^{(n-1)'}\frac{dz}{dx}T_{,}^{(n-1)'}\frac{dz}{du}+$$
$$Vz=W,$$

dans laquelle les coefficiens des différences partielles auffi-bien que V & W font des fonctions quelconques de y, x, u.

Je multiplie cette équation par un facteur Ψ, qu'on

démontreroit aisément ne devoir renfermer que les variables y, x, u; & la comparant à la transformée précédente, il me vient

$$\frac{d(B)}{d\alpha'}=\Psi A,\ \frac{d(B)}{d\zeta'}-r\frac{d(B)}{d\alpha'}=\Psi B\ldots\ldots$$
$$\frac{d(B)}{d\sigma'}-r\frac{d(B)}{d\rho'}=\Psi S,\ -r\frac{d(B)}{d\sigma'}=\Psi T;\ \text{donc}$$
$$\frac{d(B)}{d\alpha'}=\Psi A,\ \frac{d(B)}{d\zeta'}=\Psi(Ar+B)\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{d(B)}{d\sigma'}=\Psi(Ar^{n-1}+Br^{n-2}+\ldots\ldots\ldots+S);$$

r étant donné par l'équation $Ar^n+Br^{n-1}+\ldots\ldots Sr+T=0$.

J'aurai aussi

$$\frac{d(B)}{d\zeta'_{,}}-t\frac{d(B)}{d\alpha'}=\Psi B_{,},\ \frac{d(B)}{d\gamma'_{,}}-r\frac{d(B)}{d\zeta'_{,}}-t\frac{d(B)}{d\zeta'}=\Psi C_{,}\ldots\ldots-r\frac{d(B)}{d\sigma'_{,}}-t\frac{d(B)}{d\sigma'}=\Psi T_{,};$$

$$\frac{d(B)}{d\gamma'_{,,}}-t\frac{d(B)}{d\zeta'_{,}}=\Psi C_{,,},\ \frac{d(B)}{d\delta'_{,,}}-r\frac{d(B)}{d\gamma'_{,,}}-t\frac{d(B)}{d\gamma'_{,}}=\Psi D_{,,}\ldots\ldots-r\frac{d(B)}{d\sigma'_{,,}}-t\frac{d(B)}{d\sigma'_{,}}=\Psi T_{,,};$$

$$\frac{d(B)}{d\delta'_{,,,}}-t\frac{d(B)}{d\gamma'_{,,}}=\Psi D_{,,,},\ \frac{d(B)}{d\varepsilon'_{,,,}}-r\frac{d(B)}{d\delta'_{,,,}}-t\frac{d(B)}{d\delta'_{,,}}=\Psi E_{,,,}\ldots\ldots-r\frac{d(B)}{d\sigma'_{,,,}}-t\frac{d(B)}{d\sigma'_{,,}}=\Psi T_{,,,};$$

&c; d'où je tire, en conservant une partie des abréviations du n°. 85, & faisant de plus

$B_{,}r+$

$B_{,}r + C_{,} = C_{,}(1)$,
$B_{,}r^2 + C_{,}r + D_{,} = D_{,}(1)$,
&c

$C_{,,}r + D_{,,} = D_{,,}(1)$,
$C_{,,}r^2 + D_{,,}r + E_{,,} = E_{,,}(1)$,
&c, &c;

$B'r + C_{,}(1) = C_{,}(2)$,
$B'r^2 + C_{,}(1)r + D_{,}(1) = D_{,}(2)$,
&c

$B'r + C_{,}(2) = C_{,}(3)$,
$B'r^2 + C_{,}(2)r + D_{,}(2) = D_{,}(3)$,
&c, &c

$C_{,,}r + D_{,,}(1) = D_{,,}(2)$,
$C_{,,}r^2 + D_{,,}(1)r + E_{,,}(1) = E_{,,}(2)$,
&c

$C_{,,}r + D_{,,}(2) = D_{,,}(3)$,
$C_{,,}r^2 + D_{,,}(2)r + E_{,,}(2) = E_{,,}(3)$
&c, &c

&c; d'où je tire, dis-je,

$$\frac{\mathrm{d}(B)}{d\varsigma'_{,}} = (B_{,} + At) \cdot \Psi,$$

$$\frac{\mathrm{d}(B)}{d\gamma'_{,}} = (C_{,}(1) + B(2)t) \cdot \Psi \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\mathrm{d}(B)}{d\sigma'_{,}} = (S_{,}(1) + R(2)t) \cdot \Psi;$$

$$\frac{\mathrm{d}(B)}{d\gamma''_{,}} = (C_{,,} + B_{,}t + At^2) \cdot \Psi,$$

$$\frac{\mathrm{d}(B)}{d\delta'_{,,}} = (D_{,,}(1) + C_{,}(2)t + B(3)t^2) \cdot \Psi \ldots\ldots$$

$$\frac{d(B)}{d\sigma'_{,,}} = (S_{,,}(1) + R_{,}(2)t + Q(3)t^2) \cdot \Psi;$$

$$\frac{d(B)}{d\delta'_{,,,}} = (D_{,,,} + C_{,,}t + B_{,}t^2 + At^3)\Psi,$$

$$\frac{d(B)}{d\epsilon'_{,,,}} = (E_{,,,}(1) + D_{,,}(2)t + C_{,}(3)t^2 + B(4)t^3)\Psi;$$

. . . .

$$\frac{d(B)}{d\sigma'_{,,,}} = (S_{,,,}(1) + R_{,,}(2)t + Q_{,}(3)t^2 + P(4)t^3) \cdot \Psi;$$

&c, & les n équations que voici,

$$T_{,}(1) + S(2)t = 0,$$

$$T_{,,}(1) + S_{,}(2)t + R(3)t^2 = 0,$$

$$T_{,,,}(1) + S_{,,}(2)t + R_{,}(3)t^2 + Q(4)t^3 = 0;$$

&c : t fera néceſſairement donné par une de ces équations, les autres feront autant d'équations de condition.

$\frac{d(B)}{dy} - r\frac{d(B)}{dx} - t\frac{d(B)}{du}$ eſt une fonction de l'ordre $n-1$, je lui donne la forme ſuivante

$$\alpha 1 \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}} + \mathfrak{C} 1 \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-2}dx} + \ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \mathfrak{C}_{,} 1 \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-2}du} \qquad +$$

$$\sigma 1 \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \alpha 2 \frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}} + \&c + \phi 1 z + X1;$$

$$\sigma_{,} 1 \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-2}du}$$

&c

puis je ſuppoſe premierement que

$$\frac{d(B)}{d\alpha''} + \alpha 1 = B'\Psi, \ \frac{d(B)}{d\beta''} - r\frac{d(B)}{d\alpha''} + \beta 1 =$$

$$C'\Psi \ldots\ldots\ldots - r\frac{d(B)}{d\rho''} + \sigma 1 = T'\Psi;$$

$$\frac{d(B)}{d\beta_{,}''} - t\frac{d(B)}{d\alpha''} + \beta_{,} 1 = C'_{,}\Psi, \ \frac{d(B)}{d\gamma_{,}''} -$$

$$r\frac{d(B)}{d\beta''_{,}} - t\frac{d(B)}{d\beta''} + \gamma_{,} 1 = D'_{,}\Psi, \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d(B)}{d\rho''_{,}} - r\frac{d(B)}{d\pi_{,}''} - t\frac{d(B)}{d\pi''} + \varrho_{,} 1 = S'_{,}\Psi,$$

$$-r\frac{d(B)}{d\rho''_{,}} - t\frac{d(B)}{d\rho''} + \sigma_{,} 1 = T'_{,}\Psi;$$

$$\frac{d(B)}{d\gamma''_{,,}} - t\frac{d(B)}{d\beta''_{,}} + \gamma_{,,} 1 = D'_{,,}\Psi, \ \frac{d(B)}{d\delta''_{,,}} -$$

$$r\frac{d(B)}{d\gamma''_{,,}} - t\frac{d(B)}{d\gamma''_{,}} + \delta_{,,} 1 = E'_{,,}\Psi \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d(B)}{d\rho_{,,}''} - r\frac{d(B)}{d\pi''_{,,}} - t\frac{d(B)}{d\pi''_{,}} + \varrho_{,,} 1 = S'_{,,}\Psi,$$

$$-r\frac{d(B)}{d\rho''_{,,}} - t\frac{d(B)}{d\rho''_{,}} + \sigma_{,,} 1 = T'_{,,}\Psi;$$

&c, & il y aura viſiblement un nombre n de ſemblables ſuites d'équations; ſecondement que

$$\frac{d(B)}{d\alpha'''} + \alpha 2 = C''\Psi, \ \frac{d(B)}{d\beta'''} - r\frac{d(B)}{d\alpha'''} + \beta 2 =$$

$$D''\Psi, \ldots\ldots\ldots - r\frac{d(B)}{d\pi'''} + \varrho 2 = T''\Psi;$$

$$\frac{d(B)}{d\beta'''_{,}} - t\frac{d(B)}{d\alpha'''} + \beta_{,} 2 = D''_{,}\Psi, \ \frac{d(B)}{d\gamma_{,}'''} -$$

$$r\frac{d(B)}{d\beta_{,}'''} - t\frac{d(B)}{d\beta'''} + \gamma_{,} 2 = E''_{,}\Psi \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial(B)}{d\pi_{,}'''} - r\frac{\partial(B)}{do_{,}'''} - t\frac{\partial(B)}{do'''} + \pi_{,}2 = S_{,}''\Psi;$$

$$-r\frac{\partial(B)}{d\pi_{,}'''} - t\frac{\partial(B)}{d\pi'''} + \varrho_{,}2 = T_{,}''\Psi;$$

& il y aura un nombre $n-1$ de semblables suites d'équations. Nous en trouverons ensuite $n-2$, puis $n-3$, &c, jusqu'à ce qu'étant arrivés aux différences partielles du premier ordre, nous ayons

$$\frac{\partial(B)}{dz} + \alpha n - 1 = S^{(n-1)'}\Psi, \quad -r\frac{\partial(B)}{dz} + \beta n - 1 = T^{(n-1)'}\Psi, \quad -t\frac{\partial(B)}{dz} + \beta_{,} n - 1 = T_{,}^{(n-1)'}\Psi;$$

& enfin $\phi 1 = V\Psi$, $X 1 = -W\Psi$.

Soient

$$B_{,} + At = B_{,}(1),$$
$$C_{,,} + B_{,}t + At^2 = C_{,,}(1),$$
$$D_{,,,} + C_{,,}t + B_{,}t^2 + At^3 = D_{,,,}(1),$$
&c

$$C_{,}(1) + B(2)t = C_{,}(1)),$$
$$D_{,,}(1) + C_{,}(2)t + B(3)t^2 = D_{,,}(1)),$$
$$E_{,,,}(1) + D_{,,}(2)t + C_{,}(3)t^2 + B(4)t^3 = E_{,,,}(1)),$$
&c

$$\frac{dA}{dy} - r\frac{dA}{dx} - t\frac{dA}{du} = \dot{A}, \text{ \&c},$$

$$\frac{d\Psi}{dy} - r\frac{d\Psi}{dx} - t\frac{d\Psi}{du} = \dot{\Psi},$$

$$\frac{d\dot{\Psi}}{dy} - r\frac{d\dot{\Psi}}{dx} - t\frac{d\dot{\Psi}}{du} = \ddot{\Psi}, \text{ \&c.}$$

Cela posé, le facteur Ψ ne devant être fonction que des seules variables y, x, u, on aura pour la somme des différences partielles de l'ordre $n-1$ qui doivent entrer dans l'intégrale

$$\Psi(A\alpha' + B(1)\mathcal{C}' + C(1)\gamma' + \ldots\ldots + S(1)\sigma')$$
$$+ \Psi(B_{,}(1)\mathcal{C}'_{,} + C_{,}(1)\gamma'_{,} + \ldots\ldots + S'_{,}(1)\sigma'_{,})$$
$$+ \Psi(C_{,,}(1)\gamma'_{,,} + \ldots\ldots + S_{,,}(1)\sigma'_{,,})$$
&c;

& par conséquent

$$\alpha 1 = \dot{A}\Psi + A\dot{\Psi},$$
$$\mathcal{C} 1 = \dot{B}(1)\Psi + B(1)\dot{\Psi},$$
$$\gamma 1 = \dot{C}(1)\Psi + C(1)\dot{\Psi}, \text{ \&c;}$$
$$\mathcal{C}_{,} 1 = \dot{B}_{,}(1))\Psi + B_{,}(1))\dot{\Psi},$$
$$\gamma_{,} 1 = \dot{C}_{,}(1))\Psi + C_{,}(1))\dot{\Psi}, \text{ \&c;}$$
$$\gamma_{,,} 1 = \dot{C}_{,,}(1))\Psi + C_{,,}(1))\dot{\Psi}, \text{ \&c.}$$

En continuant ainsi, on trouvera, après avoir fait pour abréger

$$C'_{,} + B'(2)t = C'_{,}(1)),$$
$$D'_{,} + C'(2)t = D'_{,}(1)), \text{ \&c;}$$
$$D'_{,,} + C'_{,}(2))t = D'_{,,}(1)),$$
$$E'_{,,} + D'_{,}(2))t = E'_{,,}(1)), \text{ \&c;}$$
&c;

$$D''_{,} + C''(2)t = D''_{,}(1)),$$
$$E''_{,} + D''(2)t = E''_{,}(1)), \text{ \&c;}$$
$$E''_{,,} + D''_{,}(2))t = E''_{,,}(1)),$$
$$F''_{,,} + E''_{,}(2))t = F''_{,,}(1)), \text{ \&c;}$$
&c; &c;

$At + B_{,}(1)) = B_{,}(2))$,
$B(3)t + B_{,}(1))r + C_{,}(1)) = C_{,}(2))$,
$C(3)t + B_{,}(1))r^2 + C_{,}(1))r + D_{,}(1)) = D_{,}(2))$,
&c,

$At + B_{,}(2)) = B_{,}(3))$,
$B4t + B_{,}(2))r + C_{,}(2)) = C_{,}(3))$,
$C4t + B_{,}(2))r^2 + C_{,}(2))r + D_{,}(2)) = D_{,}(3))$,
&c &c;

$B_{,}(2))t + C_{,,}(1)) = C_{,,}(2))$,
$(C_{,}(2)) + B_{,}(2))r)t + D_{,,}(1)) + C_{,,}(1))r = D_{,,}(2))$,
$(D_{,}(2)) + C_{,}(2))r + B_{,}(2))r^2)t + E_{,,}(1)) + D_{,,}(1))r + C_{,,}(1))r^2 = E_{,,}(2))$,
&c,

$B_{,}(3))t + C_{,,}(2)) = C_{,,}(3))$,
$(C_{,}(3)) + B_{,}(3))r)t + D_{,,}(2)) + C_{,,}(2))r = D_{,,}(3))$,
$(D_{,}(3)) + C_{,}(3))r + B_{,}(3))r^2)t + E_{,,}(2)) + D_{,,}(2))r + C_{,,}(2))r^2 = E_{,,}(3))$,
&c, &c; &c;

$C'_{,}(1)) - \dot{B}_{,}(1)) = C'_{,}(2))$,
$D'_{,}(1)) - \dot{C}_{,}(1)) + C'_{,}(2))r = D'_{,}(2))$,
$E'_{,}(1)) - \dot{D}_{,}(1)) + D'_{,}(2))r = E'_{,}(2))$,
&c,

$D''_{,}(1)) - \dot{C}'_{,}(2)) = D''_{,}(2))$,
$E''_{,}(1)) - \dot{D}'_{,}(2)) + D''_{,}(2))r = E''_{,}(2))$,
$F''_{,}(1)) - \dot{E}'_{,}(2)) + E''_{,}(2))r = F''_{,}(2))$,
&c, &c;

$D'_{,,}(1)) - \dot{C}_{,,}(1)) = D'_{,,}(2),$

$E'_{,,}(1)) - \dot{D}_{,,}(1)) + D'_{,,}(2))r = E'_{,,}(2)),$

$F_{,,}'(1)) - \dot{E}_{,,}(1)) + E'_{,,}(2))\, r = F_{,,}'(2)),$

&c,

$E''_{,,}(1) - \dot{D}'_{,,}(2)) = E''_{,,}(2)),$

$F_{,,}''(1)) - \dot{E}'_{,,}(2)) + E''_{,,}(2))r = F_{,,}''(2)),$

$G''_{,,}(1)) - \dot{F}_{,,}'(2)) + F_{,,}''(2))r = G_{,,}''(2)),$

&c, &c; &c;

$B'(3)t + C_{,}'(2)) - \dot{B}_{,}(2)) = C_{,}'(3)),$

$C_{,}'(3))r + C'(3)t + D'_{,}(2)) - \dot{C}_{,}(2)) = D'_{,}(3)),$

$D'_{,}(3))r + D'(3)t + E_{,}'(2)) - \dot{D}_{,}(2)) = E_{,}'(3)),$

&c,

$C''(3)t + D_{,}''(2)) - \dot{C}_{,}'(3)) = D_{,}''(3)),$

$D_{,}''(3))r + D''(3)t + E''_{,}(2)) - \dot{D}'_{,}(3)) = E''_{,}(3)),$

$E_{,}''(3))r + E''(3)t + F_{,}''(2)) - \dot{E}_{,}'(3)) = F_{,}''(3)),$

&c, &c;

$C_{,}'(3))t + D'_{,,}(2)) + \dot{C}_{,,}(2)) = D'_{,,}(3)),$

$D'_{,,}(3))r + D'_{,}(3))t + E'_{,,}(2)) - \dot{D}_{,,}(2)) = E'_{,,}(3)),$

$E_{,,}'(3))r + E_{,}'(3))t + F_{,,}'(2)) - \dot{E}_{,,}(2)) = F_{,,}'(3)),$

&c,

$D''_{,}(3))t + E''_{,,}(2)) - \dot{D}'_{,,}(3)) = E''_{,,}(3)),$

$E_{,,}''(3))r + E_{,}''(3))t + F_{,,}''(2)) - \dot{E}'_{,,}(3)) = F_{,,}''(3)),$

$F_{,,}''(3))r + F_{,}''(3))t + G''_{,,}(2)) - \dot{F}_{,,}'(3)) = G''_{,,}(3)),$

&c, &c; &c;

$B'(4)t + C'_{,}(3)) - \dot{B}_{,}(3)) = C'_{,}(4))$,

$C'_{,}(4))r + C'(4)t + D'_{,}(3)) - \dot{C}_{,}(3)) = D'_{,}(4))$,

$D'_{,}(4))r + D'(4)t + E'_{,}(3)) - \dot{D}_{,}(3)) = E'_{,}(4))$,

&c, &c;

$C'_{,}(4))t + D'_{,,}(3)) - \dot{C}_{,,}(3)) = D'_{,,}(4))$,

$D'_{,,}(4))r + D'_{,}(4))t + E'_{,,}(3)) - \dot{D}_{,,}(3)) = E'_{,,}(4))$,

$E'_{,,}(4))r + E'_{,}(4))t + F'_{,,}(3)) - \dot{E}_{,,}(3)) = F'_{,,}(4))$,

&c, &c;

&c: on trouvera, dis-je, pour la somme de tous les termes de l'intégrale qui renferment z & ses différences partielles,

$$\Psi\left(A\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}} + B(1)\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}dx} + \ldots\ldots\ldots + S(1)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right)$$

$$+\Psi\left(B_{,}(1))\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-2}du} + \ldots\ldots\ldots + S_{,}(1))\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-2}du}\right)$$

&c

$$+(B'(2)\Psi - A\dot{\Psi})\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}} + (C'(2)\Psi - B(2)\dot{\Psi})\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-3}dx} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(C'_{,}(2))\Psi - B_{,}(2))\dot{\Psi})\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-3}du} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(S'(2)\Psi - R(2)\dot{\Psi})\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}$$

$$(S'_{,}(2))\Psi - R_{,}(2))\dot{\Psi})\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}du}$$

&c

$$+(C''(2)\Psi - B'(3)\dot{\Psi} + A\ddot{\Psi})\frac{d^{n-3}z}{dy^{n-3}}$$

$$+(D''(2)\Psi - C'(3)\dot{\Psi} + B(3)\ddot{\Psi})\frac{d^{n-3}z}{dy^{n-4}dx} +$$

....

$$+(S''(2)\Psi - R'(3)\dot{\Psi} + Q(3)\ddot{\Psi})\frac{d^{n-3}z}{dx^{n-3}}$$

$$+(D''_{,}(2))\Psi - C'_{,}(3))\dot{\Psi} + B_{,}(3))\ddot{\Psi})\frac{d^{n-3}z}{dy^{n-4}du} +$$

....

$$+(S''_{,}(2))\Psi - R'_{,}(3))\dot{\Psi} + Q_{,}(3))\ddot{\Psi})\frac{d^{n-3}z}{dx^{n-4}du}$$

&c

$$+(D'''(2)\Psi - C''(3)\dot{\Psi}$$

$$+B'(4)\ddot{\Psi} - A\dddot{\Psi})\frac{d^{n-4}z}{dy^{n-4}} + (E'''(2)\Psi - D''(3)\dot{\Psi}$$

$$+C'(4)\ddot{\Psi} - B(4)\dddot{\Psi})\frac{d^{n-4}z}{dy^{n-4}dx}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (S'''(2)\Psi - R''(3)\dot{\Psi}$$

$$+Q'(4)\ddot{\Psi} - P(4)\dddot{\Psi})\frac{d^{n-4}z}{dx^{n-4}}$$

$$+(E'''_{,}(2))\Psi - D''_{,}(3))\dot{\Psi}$$

$$+C'_{,}(4))\ddot{\Psi} - B_{,}(4))\dddot{\Psi})\frac{d^{n-4}z}{dy^{n-4}du}$$

$$+\ldots\ldots\ldots + (S_{,}'''(2))\Psi - R_{,}''(3))\dot{\Psi}$$

$$+ Q_{,}'(4))\ddot{\Psi} - P_{,}(4))\dddot{\Psi})\,\frac{dx^{n-4}z}{dx^{n-5}du}$$

&c

$$+ \&c + (S^{(n-1)}(2)\Psi - R^{(n-2)}(3)\dot{\Psi} + \ldots\ldots$$

$$\pm B_{,}(n)\overset{(.)n-2}{\Psi} \mp A\overset{(.)n-1}{\Psi})z.$$

On aura de plus ces n ſuites d'équations

$$T'(2)\Psi - S(2)\dot{\Psi} = 0,$$

$$T_{,}'(2))\Psi - S_{,}(2))\dot{\Psi} = 0,$$

$$T_{,,}'(2))\Psi - S_{,,}(2))\dot{\Psi} = 0,$$

&c

$$T''(2)\Psi - S'(3)\dot{\Psi} + R(3)\ddot{\Psi} = 0,$$

$$T_{,}''(2))\Psi - S_{,}'(3))\dot{\Psi} + R_{,}(3))\ddot{\Psi} = 0,$$

$$T_{,,}''(2))\Psi - S_{,,}'(3))\dot{\Psi} + R_{,,}(3))\ddot{\Psi} = 0,$$

&c

$$T'''(2)\Psi - S''(3)\dot{\Psi} + R'(4)\ddot{\Psi} - Q(4)\dddot{\Psi} = 0,$$

$$T_{,}'''(2))\Psi - S_{,}''(3))\dot{\Psi} + R'_{,}(4))\ddot{\Psi} - Q_{,}(4))\dddot{\Psi} = 0,$$

$$T_{,,}'''(2))\Psi - S_{,,}''(3))\dot{\Psi} + R'_{,,}(4))\ddot{\Psi} - Q_{,,}(4))\dddot{\Psi} = 0,$$

&c

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(V - S^{(n-1)}(2))\Psi - S^{(n-1)}(3)\dot{\Psi} + R^{(n-2)}(4)\ddot{\Psi}$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pm B'(n+1)\overset{(.)n-1}{\Psi} \mp A\overset{(.)n}{\Psi} = 0;$$

La premiere de ces ſuites renferme n équations, la ſeconde en renferme $n-1$, & ainſi de ſuite en progreſſion arithmétique juſqu'à la derniere qui n'en com-

prend qu'une ſeule : c'eſt-à-dire qu'on aura $\frac{1+n}{2}n$ équations, & comme il n'en faut qu'une pour déterminer le facteur Ψ, il reſtera néceſſairement $\frac{n^2+n}{2}-1$ équations de condition, qui avec les $n-1$ trouvées plus haut, feront $\frac{n^2+n}{2}+n-2$ ou $\frac{(n-1)(n+4)}{2}$ équations de condition, pour que la propoſée ait une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur.

Nous ajouterons que r & t ne peuvent être fonctions chacun que de deux quelconques des trois variables y, x, u, & qu'ils ne peuvent être fonctions en même-tems des deux mêmes variables; ſi r étant fonction de y & x, t l'eſt de y & u, ou de x & u, on trouvera ω & $\omega 1$ en rendant exactes les différentielles $rdy+dx$ & $tdy+du$, ou $rdy+dx$ & $tdx+du$. Il ne reſte plus qu'à trouver le terme de l'intégrale qui n'eſt fonction que de y, x, u; on le nommera X, &, à cauſe de $\frac{dX}{dy}-r\frac{dX}{dx}-t\frac{dX}{du}=X1=-\Psi W$, on aura $X=-\int \Psi W dy$, en n'oubliant pas qu'avant d'intégrer par rapport à y, on doit mettre dans ΨW pour x & u leurs valeurs en y, ω, $\omega 1$. Nous avons oublié de faire remarquer que pour déterminer le facteur Ψ, on n'aura qu'à ſatisfaire à une équation aux différences ordinaires qui ne ſera jamais d'un ordre plus élevé que la propoſée.

Enfin ſi nous prenons pour exemple l'équation homogène

$$a\frac{d^n z}{dy^n}+b\frac{d^n z}{dy^{n-1}dx}+\&c=W,$$
$$+b_1\frac{d^n z}{dy^{n-1}du}$$

nous trouverons, 1°. que r eſt une quantité conſtante donnée par l'équation $ar^n + br^{n-1} + \&c = 0$; 2°. que t eſt auſſi une quantité conſtante, & qu'il y a entre les coefficiens conſtans $n - 1$ équations de condition; 3°. que toutes les équations qui renferment le facteur ſe réduiſent à celles-ci $\dot{\Psi} = 0$, $\ddot{\Psi} = 0$, &c, & que par conſéquent il ſera toujours poſſible d'y ſatisfaire en prenant $\Psi = 1$; &c. Propoſons-nous, avec M. Euler, d'intégrer l'équation du ſecond ordre $a \frac{d^2 z}{dy^2} + b \frac{d^2 z}{dx^2} + c \frac{d^2 z}{du^2} + 2e \frac{d^2 z}{dy dx} + 2f \frac{d^2 z}{dy du} + 2g \frac{d^2 z}{dx du} = 0$; nous trouverons que r eſt donné par l'équation du ſecond degré $ar^2 + 2er + b = 0$; que de plus on a les deux équations $g + fr + (e + ar)t = 0$, $c + 2ft + at^2 = 0$, dont l'une ſervira à déterminer t, & l'autre ſera l'équation de condition; nous trouverons enfin que la propoſée a pour intégrale premiere complette

$$a \frac{dz}{dy} + (2e + ar) \frac{dz}{dx} + (2f + at) \frac{dz}{du} + F : (ry + x,\ ty + u) = 0,$$

ou

$$a \frac{dz}{dy} + (2e + ar) \frac{dz}{dx} + (2f + at) \frac{dz}{du} + f : (ry + x, -tx + ru) = 0.$$

Pour vérifier ces réſultats, on différentiera d'abord la premiere équation par rapport à chacune des trois variables y, x, u, & on aura, en ſe contentant d'écrire F pour $F : (ry + x,\ ty + u)$ les trois équations

$a\frac{d^2z}{dy^2}+(2e+ar)\frac{d^2z}{dydx}+(2f+at)\frac{d^2z}{dydu}+$
$(\Gamma r+\Gamma\Delta t)F'=0$,
$a\frac{d^2z}{dydx}+(2e+ar)\frac{d^2z}{dx^2}+(2f+at)\frac{d^2z}{dxdu}+$
$\Gamma F'=0$,
$a\frac{d^2z}{dydu}+(2e+ar)\frac{d^2z}{dxdu}+(2f+at)\frac{d^2z}{du^2}+$
$\Gamma\Delta F'=0$;

on ôtera de la premiere la feconde après l'avoir multipliée par r, & il viendra $a\frac{d^2z}{dy^2}+2e\frac{d^2z}{dydx}-(2er+ar^2)\frac{d^2z}{dx^2}+(2f+at)\frac{d^2z}{dydu}-(2fr+art)\frac{d^2z}{dxdu}+\Gamma\Delta tF'=0$; on ôtera de celle-ci la troifiéme après l'avoir multipliée par t, & on aura $a\frac{d^2z}{dy^2}+2e\frac{d^2z}{dydx}-(2er+ar^2)\frac{d^2z}{dx^2}+$
$2f\frac{d^2z}{dydu}-2(art+fr+et)\frac{d^2z}{dxdu}-$
$(2ft+at^2)\frac{d^2z}{du^2}=0$, qui fe réduit à la propofée lorfque $ar^2+2er+b=0$, $art+fr+et+g=0$; $at^2+2ft+c=0$. L'autre réfultat fe vérifiera de la même maniere.

88. Il y a des équations aux différences partielles qui n'ont point d'intégrales fucceffives, & defquelles cependant il eft poffible de tirer la valeur complette de z. Telle eft dans une infinité de cas l'équation générale des cordes vibrantes que nous pouvons repré-

senter (n°. 55) par $\frac{d^2 z}{dy^2} = X^2 \frac{d^2 z}{dx^2}$, où X est une certaine fonction de x qui dépend de la grosseur & de la tension de la corde. En comparant cette équation à celle du n°. 84, on a $A = 1$, $B = 0$, $C = -X^2$, $B' = 0$, $C' = 0$, &c; r est donné par l'équation $r^2 = X^2$, d'où l'on tire $r = \pm X$, puis $b = y \pm \int \frac{dx}{X}$. De plus, $B(1) = \pm X$, $\dot{B}(1) = -X \frac{dX}{dx}$, $C'(1) = 0$, $B'(2) = 0$, $B'(3) = 0$, $C'(2) = X \frac{dX}{dx}$, $B(2) = \pm 2X$; on a donc pour équations de condition $\ddot{\Psi} = 0$ & $\frac{dX}{dx} \Psi \mp 2\dot{\Psi} = 0$. Lorsque r aura le signe $+$, on tirera de $\ddot{\Psi} = 0$, $\dot{\Psi} = \phi : \left(y + \int \frac{dx}{X}\right)$ & $\Psi = y\phi : \left(y + \int \frac{dx}{X}\right) + f : \left(y + \int \frac{dx}{X}\right)$; par ces substitutions l'autre équation de condition deviendra $\frac{dX}{dx} \left(y\phi : \left(y + \int \frac{dx}{X}\right) + f : \left(y + \int \frac{dx}{X}\right)\right) = 2\phi : \left(y + \int \frac{dx}{X}\right)$, à laquelle on ne pourra satisfaire qu'en prenant $\frac{dX}{dx} = 0$ ou $X =$ constante, ce qui donnera $\phi : \left(y + \int \frac{dX}{x}\right) = 0$. Lorsque r aura le signe $-$, on tirera de $\ddot{\Psi} = 0$, $\dot{\Psi} = \phi : \left(y - \int \frac{dx}{X}\right)$ & $\Psi = y\phi : \left(y - \int \frac{dx}{X}\right) + f : \left(y - \int \frac{dx}{X}\right)$, valeurs qui étant

substituées dans l'autre équation de condition donneront aussi le même résultat. Ainsi l'équation générale des cordes vibrantes n'aura d'intégrale de l'ordre immédiatement inférieur que lorsque X sera une quantité constante; cependant dans une infinité d'autres cas, on en pourra tirer la valeur complette de z, comme on le verra bientôt.

Soit d'abord l'équation du second ordre

$$A\frac{d^2z}{dy^2}+B\frac{d^2z}{dy\,dx}+C\frac{d^2z}{dx^2}+Vz=0,$$
$$+B'\frac{dz}{dy}\;+C'\frac{dz}{dx}$$

que je représenterai par $E(z)=0$. Lorsque j'aurai une équation de la même forme, ayant les mêmes coefficiens A, B, C, B', C', V, où l'indéterminée sera α, je la représenterai par $E(\alpha)=0$; en général, si m'étant servi de $E(z)=0$, $e(\beta)=0$ pour désigner deux équations, je viens à écrire $E(\alpha)=0$, $e(\gamma)=0$, celles-ci désigneront ce que deviendront les précédentes, lorsqu'on aura mis, dans la premiere α pour z, & dans l'autre γ pour β. Cela posé, si nous représentons par

$$z=\alpha+\beta F:(\omega)+\gamma F':(\omega)+\delta F'':(\omega)+\&c$$
$$\beta 1 f:(\omega 1)+\gamma 1 f':(\omega 1)+\delta 1 f''(\omega 1)+\&c$$

la valeur la plus générale de z qui puisse satisfaire à l'équation du second ordre proposée, & que nous fassions les substitutions nécessaires, nous aurons la transformée

$$E(\alpha)+E(\beta)F:(\omega)+[E(\gamma)+e(\beta)]F':(\omega)+$$
$$[E(\delta)+e(\gamma)+\beta K]F'':(\omega)+\&c$$
$$+E(\beta 1 f:(\omega 1)+[E(\gamma 1)+e'(\beta 1)]f':(\omega 1)+$$
$$[E(\delta 1)+e'(\gamma 1)+\beta 1 K 1]f'':(\omega 1)+\&c$$
$$=0,$$

où $K = A\left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2 + B\frac{d\omega}{dy}\frac{d\omega}{dx} + C\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2$,

$K1 = A\left(\frac{d\omega 1}{dy}\right)^2 + B\frac{d\omega 1}{dy}\frac{d\omega 1}{dx} + C\left(\frac{d\omega 1}{dx}\right)^2$,

$e(\beta) = \beta\left[A\frac{d^2\omega}{dy^2} + B\frac{d^2\omega}{dydx} + C\frac{d^2\omega}{dx^2}\right] + \left[2A\frac{d\beta}{dy} + B\frac{d\beta}{dx} + B'\beta\right]\frac{d\omega}{dy} + \left[B\frac{d\beta}{dy} + 2C\frac{d\beta}{dx} + C'\beta\right]\frac{d\omega}{dx}$, $e'(\beta 1) = \beta 1\left[A\frac{d^2\omega 1}{dy^2} + B\frac{d^2\omega 1}{dydx} + C\frac{d^2\omega 1}{dx^2}\right] + \left[2A\frac{d\beta 1}{dy} + B\frac{d\beta 1}{dx} + B'\beta 1\right]\frac{d\omega 1}{dy} + \left[B\frac{d\beta 1}{dy} + 2C\frac{d\beta 1}{dx} + C'\beta 1\right]\frac{d\omega 1}{dx}$, &c. Mais cette transformée doit être identique, quel que soit le genre des fonctions désignées par F & f; elle donnera donc nécessairement

$E(\alpha) = 0$, $E(\beta) = 0$, $E(\gamma) + e(\beta) = 0$, $E(\delta) + e(\gamma) + \beta K = 0$, $E(\epsilon) + e(\delta) + \gamma K = 0$, &c;

$E(\beta 1) = 0$, $E(\gamma 1) + e'(\beta 1) = 0$, $E(\delta 1) + e'(\gamma 1) + \beta 1 K 1 = 0$, $E(\epsilon 1) + e'(\delta 1) + \gamma 1 K 1 = 0$, &c;

nous allons voir que ce nombre d'équations suffit pour résoudre le Problême.

Premierement, il est clair qu'on peut prendre $\alpha = 0$, & que ce terme peut manquer dans la valeur de z sans en diminuer la généralité. Secondement, si cette valeur de z doit être finie, elle sera ou $z = \beta F:(\omega) + \beta 1 f:(\omega 1)$, ou $z = \beta F:(\omega) + \gamma F':(\omega) + \beta 1 f:(\omega 1) + \gamma 1 f'(\omega 1)$, &c; il faut nous occuper de ces différens cas.

Si

Si la valeur complette de z doit être de cette forme $z = \zeta F:(\omega) + \zeta 1 f:(\omega 1)$, les autres coefficiens $\varkappa$, $\varkappa 1$, &c, seront nuls, & il ne restera des équations précédentes que celles-ci, $E(\zeta)=0$, $e(\zeta)=0$, $K=0$, $E(\zeta 1)=0$, $e'(\zeta 1)=0$, $K1=0$. Les équations $K=0$, $K1=0$ nous apprennent que $\frac{d\omega}{dy} = r\frac{d\omega}{dx}$; $\frac{d\omega 1}{dy} = r1\frac{d\omega 1}{dx}$, r & $r1$ étant les deux racines de l'équation du second degré $Ar^2 + Br + C = 0$; celles-ci $e(\zeta)=0$, $e'(\zeta 1)=0$, seront linéaires & du premier ordre relativement à ζ & $\zeta 1$; nous en tirerons aisément les valeurs de ces quantités qui devront satisfaire aux équations $E(\zeta)=0$, $E(\zeta 1)=0$. Si la valeur complette de z doit être de cette forme, $z = \zeta F:(\omega) + \varkappa F':(\omega) + \zeta 1 f:(\omega 1) + \varkappa 1 f':(\omega 1)$, on aura pour résoudre le Problême les équations suivantes $E(\zeta)=0$, $E(\varkappa) + e(\zeta) = 0$, $e(\varkappa)=0$, $K=0$, $E(\zeta 1)=0$, $E(\varkappa 1) + e'(\zeta 1) = 0$, $e'(\varkappa 1)=0$, $K1=0$. On aura comme ci-devant ω, $\omega 1$ donnés par les deux équations $\frac{d\omega}{dy} = r\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d\omega 1}{dy} = r1\frac{d\omega 1}{dx}$; puis ζ, $\zeta 1$, $\varkappa$, $\varkappa 1$ seront renfermés dans des équations linéaires du premier ordre, desquelles il sera facile de tirer les valeurs de ces quantités qui devront satisfaire aux équations $E(\zeta)=0$, $E(\zeta 1)=0$; &c. Je m'empresse d'éclaircir cette théorie par des exemples.

Je prendrai pour premier exemple l'équation générale des cordes vibrantes, $\frac{d^2z}{dy^2} = X^2\frac{d^2z}{dx^2}$. A cause de $A=1$, $B=0$, $C=-X^2$, $B'=0$, $C'=0$, $V=0$; j'aurai $r=X$, $r1=-X$, $\omega = \int\frac{dx}{X} + y$, $\omega 1 = \int\frac{dx}{X} - y$,

Xx

$E(\zeta) = \frac{d^2\zeta}{dy^2} - X^2\frac{d^2\zeta}{dx^2}$, $e(\zeta) = 2\frac{d\zeta}{dy} - 2X\frac{d\zeta}{dx} + \zeta\frac{dX}{dx}$, $e'(\zeta 1) = -2\frac{d\zeta 1}{dy} - 2X\frac{d\zeta 1}{dx} + \zeta 1\frac{dX}{dx}$; & si je suppose que les coefficiens ζ, ν, &c, $\zeta 1$, $\nu 1$, &c, ne renferment de variable que x, je pourrai faire $\zeta 1 = \zeta$, $\nu 1 = \nu$, &c. Cela posé :

1°. Si l'intégrale complette de la proposée doit être $z = \zeta\left[F:\left(\int\frac{dx}{X} + y\right) + f:\left(\int\frac{dx}{X} - y\right)\right]$, le Problême ne dépendra que des deux équations $\frac{d^2\zeta}{dx^2} = 0$ & $\frac{2d\zeta}{\zeta} = \frac{dX}{X}$. La premiere donne $\zeta = ax + b$; quant à l'autre qui étant intégrée devient $\zeta^2 = cX$, elle nous apprend qu'alors X doit être de la forme $\frac{(ax+b)^2}{c}$.

2°. Soit fait pour abréger $F:\left(\int\frac{dx}{X} + y\right) + f:\left(\int\frac{dx}{X} - y\right) = \Pi$; si l'intégrale de la proposée doit être $z = \zeta\Pi + \nu\Pi'$, on aura pour résoudre le Problême les trois équations $\frac{d^2\zeta}{dx^2} = 0$, $-X^2\frac{d^2\nu}{dx^2} - 2X\frac{d\zeta}{dx} + \zeta\frac{dX}{dx} = 0$, $\frac{2d\nu}{\nu} = \frac{dX}{X}$.

On pourra prendre $\zeta = 1$; &, à cause de $\nu^2 = cX$, on aura pour déterminer ν, l'équation $\frac{\nu^3}{c}\frac{d^2\nu}{dx^2} - 2\frac{d\nu}{dx} = 0$. En faisant $\nu = K(ax+b)^\lambda$, on la chan-

gera en celle-ci $\frac{a}{c} K^3 (\lambda - 1)(ax+b)^{3\lambda-1} - 2 = 0$, qui devant être identique donne $3\lambda - 1 = 0$ ou $\lambda = \frac{1}{3}$, & $K = \sqrt[3]{\frac{3c}{a}}$. Donc $\varkappa = -\left(\frac{3c}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ $(ax+b)^{\frac{1}{3}}$ & $X = \frac{1}{c}\left(\frac{3c}{a}\right)^{\frac{2}{3}}(ax+b)^{\frac{2}{3}}$.

Si on prend $\mathit{6} = ax+b$; à cause de $\varkappa^2 = cx$, on aura pour déterminer $\varkappa$ l'équation $\frac{\varkappa^3}{c}\frac{d^2\varkappa}{dx^2} + 2a\varkappa - 2(ax+b)\frac{d\varkappa}{dx} = 0$. Soit $\varkappa = K(ax+b)^\lambda$; l'équation précédente deviendra $\frac{a}{c} K^3 \lambda(\lambda - 1)$ $(ax+b)^{3\lambda-2} - 2(\lambda - 1) = 0$, qu'on rendra identique en faisant $3\lambda - 2 = 0$ ou $\lambda = \frac{2}{3}$, $K = \sqrt[3]{\frac{3c}{a}}$. Donc $\mathit{6} = ax+b$, $\varkappa = \left(\frac{3c}{a}\right)^{\frac{1}{3}}(ax+b)^{\frac{2}{3}}$, $X = \frac{1}{c}\left(\frac{3c}{a}\right)^{\frac{2}{3}}(ax+b)^{\frac{4}{3}}$.

3°. Nous chercherons la forme que la proposée doit avoir pour que son intégrale complette soit $z = \mathit{6}\Pi + \varkappa\Pi' + \delta\Pi''$; nous aurons dans ce cas les quatre équations $\frac{d^2\mathit{6}}{dx^2} = 0$, $-X^2\frac{d^2\varkappa}{dx^2} - 2X\frac{d\mathit{6}}{dx} + \mathit{6}\frac{dX}{dx} = 0$, $-X^2\frac{d^2\delta}{dx^2} - 2X\frac{d\varkappa}{dx} + \varkappa\frac{dX}{dx} = 0$, $\frac{2d\delta}{\delta} = \frac{dX}{X}$.

Si nous prenons $\mathit{6} = 1$; à cause de $\delta^2 = cX$, le

Problême eſt réduit à ſatisfaire à ces deux équations $\frac{\delta^3}{c}\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} - 2\frac{d\delta}{dx} = 0$, $\frac{\delta}{c}\frac{d^2\delta}{dx^2} + 2\frac{d(\varepsilon:\delta)}{dx} = 0$. Pour cela nous ferons $\delta = K(ax+b)^\lambda$, d'où nous tirerons $\delta\frac{d^2\delta}{dx^2} = K^2a^2\lambda(\lambda-1)(ax+b)^{2\lambda-2}$, & que par conſéquent $\frac{\varepsilon}{\delta}$ ne peut être que de la forme $K'(ax+b)^{2\lambda-1}$, ce qui donne $\varepsilon = KK'(ax+b)^{3\lambda-1}$. Par ces ſubſtitutions, nos deux équations ſont changées en celles-ci $\frac{a}{c}K^3K'(3\lambda-1)(3\lambda-2)(ax+b)^{5\lambda-2} - 2\lambda = 0$, $\frac{a}{c}K^2\lambda(\lambda-1) + 2K'(2\lambda-1) = 0$, qui lorſqu'on fait $5\lambda - 2 = 0$ ou $\lambda = \frac{2}{5}$, deviennent $K^3K' + \frac{5c}{a} = 0$, $K^2 + \frac{5c}{3a}K' = 0$, & donnent $K = \sqrt[5]{\frac{25c^2}{3a^2}}$, $K' = -\frac{3a}{5c}\left(\sqrt[5]{\frac{25c^2}{3a^2}}\right)^2$. Donc $\varepsilon = -\frac{3a}{5c}\left(\frac{25c^2}{3a^2}\right)^{\frac{3}{5}}(ax+b)^{\frac{1}{5}}$, $\delta = \left(\frac{25c^2}{3a^2}\right)^{\frac{1}{5}}(ax+b)^{\frac{2}{5}}$, $X = \frac{1}{c}\left(\frac{25c^2}{3a^2}\right)^{\frac{2}{5}}(ax+b)^{\frac{4}{5}}$.

La valeur la plus générale qu'on puiſſe donner à ζ eſt $\zeta = ax+b$; alors, à cauſe de $\delta^2 = cX$, on aura les deux équations $\frac{\delta^3}{c}\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + 2a\delta - 2(ax+b)\frac{d\delta}{dx} = 0$, $\frac{\delta}{c}\frac{d^2\delta}{dx^2} + 2\frac{\delta(\varepsilon:\delta)}{dx} = 0$. Si on fait

$\delta = K(ax+b)^{\lambda}$, il faudra que $\frac{\varepsilon}{\delta}$ soit de la forme $K'(ax+b)^{2\lambda-1}$, ce qui donnera $\varepsilon = KK'(ax+b)^{3\lambda-1}$. Par ces substitutions, nos deux équations seront changées en celles-ci $\frac{a}{c}K^3K'(3\lambda-1)(3\lambda-2)(ax+b)^{5\lambda-3} - 2(\lambda-1) = 0$, $\frac{a}{c}K^2\lambda(\lambda-1) + 2K'(2\lambda-1) = 0$, qui, en faisant $5\lambda - 3 = 0$ ou $\lambda = \frac{3}{5}$, deviendront $K'K^3 - \frac{5c}{a} = 0$, $K^2 - \frac{5c}{3a}K' = 0$, & donneront $K = \sqrt[5]{\frac{25c^2}{3a^2}}$, $K' = \frac{3a}{5c}\left(\sqrt[5]{\frac{25c^2}{3a^2}}\right)^2$. Donc $\varepsilon = \frac{3a}{5c}\left(\frac{25c^2}{3a^2}\right)^{\frac{3}{5}}(ax+b)^{\frac{4}{5}}$, $\delta = \left(\frac{25c^2}{3a^2}\right)^{\frac{1}{5}}(ax+b)^{\frac{3}{5}}$, $X = \frac{1}{e}\left(\frac{25c^2}{3a^2}\right)^{\frac{2}{5}}(ax+b)^{\frac{6}{5}}$. &c.

La proposée étant $\frac{d^2z}{dy^2} = K^2(ax+b)^{2m}\frac{d^2z}{dx^2}$; soit $z = \zeta\Pi + \varepsilon\Pi' + \delta\Pi'' + \iota\Pi''' + \&c$; on aura pour déterminer ces coefficiens cette suite d'équations $\frac{d^2\zeta}{dx^2} = 0$, $K(ax+b)^{m+1}\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + 2(ax+b)\frac{d\zeta}{dx} - am\zeta = 0$, $K(ax+b)^{m+1}\frac{d^2\delta}{dx^2} + 2(ax+b)\frac{d\varepsilon}{dx} - am\varepsilon = 0$, &c. On tire de la premiere $\zeta = 1$ ou $\zeta = g(ax+b)$; il faut examiner ces deux cas séparément.

Premierement, si $\zeta = 1$, la seconde équation de-

viendra $K(ax+b)^{m+1}\frac{d^2 u}{dx^2}-am=0$. En faisant $u=H(ax+b)^\lambda$, on la changera en celle-ci, $HKa\lambda(\lambda-1)(ax+b)^{\lambda+m-1}-m=0$, qui doit être identique; elle donnera par conséquent $\lambda=-m+1$, $H=\frac{1}{Ka(m-1)}$ & $u=\frac{(ax+b)^{-m+1}}{Ka(m-1)}$.

La troisiéme équation deviendra $K^2(ax+b)^{m}\frac{d^2\delta}{dx^2}-\frac{3m-2}{m-1}=0$; en faisant $\delta=H(ax+b)^\lambda$, on la changera en celle ci, $HK^2a^2\lambda(\lambda-1)(ax+b)^{\lambda+2m-2}-\frac{3m-2}{m-1}=0$, qui doit être identique; on en tirera donc $\lambda=-2(m-1)$, $H=\frac{3m-2}{2K^2a^2(m-1)^2(2m-1)}$ & $\delta=\frac{(3m-2)(ax+b)^{-2(m-1)}}{2K^2a^2(m-1)^2(2m-1)}$. On formera une quatriéme équation $K^3a(ax+b)^{3m-2}\frac{d^2\epsilon}{dx^2}-\frac{(3m-2)(5m-4)}{2(m-1)^2(2m-1)}=0$, qui, en faisant $\epsilon=H(ax+b)_\lambda$, deviendra $HK^3a^3\lambda(\lambda-1)(ax+b)^{\lambda+3m-3}-\frac{(3m-2)(5m-4)}{2(m-1)^2(2m-1)}=0$, & donnera $\lambda=-3(m-1)$, $H=\frac{(3m-2)(5m-4)}{2.3K^3a^3(m-1)^3(2m-1)(3m-2)}$, $\epsilon=\frac{(3m-2)(5m-4)(ax+b)^{-3(m-1)}}{2.3K^3a^3(m-1)^3(2m-1)(3m-2)}$. On trouvera de la même maniere les autres coefficiens, & on

verra aisément que la série doit se terminer toutes les fois que, i étant un nombre entier positif quelconque, on aura $m = \frac{2i}{2i+1}$.

Secondement, si $\beta = g(ax+b)$, la seconde équation deviendra $K(ax+b)^m \frac{d^2\upsilon}{dx^2} - ag(m-2) = 0$. En faisant $\upsilon = H(ax+b)^\lambda$, on la changera en celle-ci, $HKa\lambda(\lambda-1)(ax+b)^{\lambda+m-2} - g(m-2) = 0$ qui doit être identique ; elle donnera par conséquent $\lambda = -m+2$, $H = \frac{g}{Ka(m-1)}$, & $\upsilon = \frac{g(ax+b)^{-m+2}}{Ka(m-1)}$. La troisiéme équation deviendra $K^2(ax+b)^{2m-1} \frac{d^2\delta}{dx^2} - \frac{g(3m-4)}{m-1} = 0$; en faisant $\delta = H(ax+b)^\lambda$, on la changera en celle-ci, $HK^2a^2\lambda(\lambda-1)(ax+b)^{\lambda+2m-3} - \frac{g(3m-4)}{m-1} = 0$, qui donnera $\lambda = -2m+3$, $H = \frac{g(3m-4)}{2K^2a^2(m-1)^2(2m-3)}$ & $\delta = \frac{g(3m-4)(ax+b)^{-2m+3}}{2K^2a^2(m-1)^2(2m-3)}$. On formera cette quatriéme équation $K^3a(ax+b)^{3m-2} \frac{d^2\varepsilon}{dx^2} - \frac{g(3m-4)(5m-6)}{(m-1)(2m-2)(2m-3)} = 0$, qui, en faisant $\varepsilon = H(ax+b)^\lambda$, deviendra $HK^3a^3\lambda(\lambda-1)(ax+b)^{\lambda+3m-4} - \frac{g(3m-4)(5m-6)}{2(m-1)^2(2m-3)} = 0$, & donnera $\lambda = -3m+4$, $H =$

$\frac{g(3m-4)(5m-6)}{2.3K^3a^3(m-1)^3(2m-3)(3m-4)}$ & $\iota=$ $\frac{g(3m-4)(5m-6)(ax+b)^{-3m+4}}{2.3K\ a^3(m-1)^3(2m-3)(3m-4)}$. On trouvera de la même maniere les autres coefficiens, dans lesquels on pourra faire, aussi-bien que dans les précédens, $g=1$; & il sera clair que la série doit se terminer toutes les fois que, i étant un nombre entier positif, on aura $m=\frac{2i}{2i-1}$.

Nous avons donc trouvé des deux manieres que si m est une quantité de cette forme, $\frac{2i}{2i\mp 1}$, i étant un nombre entier positif quelconque, l'équation $\frac{d^2z}{dy^2}=K^2(ax+b)^{2m}\frac{d^2z}{dx^2}$ est intégrable absolument; c'est-à-dire que cette équation est intégrable absolument dans les mêmes cas que celles du Comte Riccati (n°. 72).

Les recherches sur la propagation du son, comme on peut le voir dans les Mémoires de MM. Euler & de la Grange imprimés dans le deuxiéme volume des Mélanges de la Société Royale de Turin; les recherches sur la propagation du son, dis-je, ont conduit à l'équation suivante, $\frac{1}{2a^2}\frac{d^2z}{dy^2}=\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dz}{dx}-\frac{2z}{x^2}$. Dans cet exemple, $A=\frac{1}{2a^2}$, $B=0$, $C=-1$, $B'=0$, $C'=-\frac{2}{x}$, $V=\frac{2}{x^2}$; r est donné par l'équation du second degré $\frac{r^2}{2a^2}-1=0$, d'où l'on tire $r=a\sqrt{2}$, $r1=-a\sqrt{2}$; & on a

$\omega = x + ay\sqrt{2}$, $\omega 1 = x - ay\sqrt{2}$. Cela posé, on verra aisément que la proposée doit avoir pour intégrale $z = \zeta[F:(x+ay\sqrt{2}) + f:(x-ay\sqrt{2})] + \nu[F':(x+ay\sqrt{2}) + f':(x-ay\sqrt{2})]$, ζ & ν étant des fonctions de x seul qui satisfassent aux trois équations $\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d\zeta}{dx} - \frac{2\zeta}{x^2} = 0$, $\frac{d^2\nu}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d\nu}{dx} - \frac{2\nu}{x^2} + 2\frac{d\zeta}{dx} + \frac{2\zeta}{x} = 0$, $\frac{d\nu}{dx} + \frac{\nu}{x} = 0$.

On tire de la troisiéme $\nu = \frac{c}{x}$; en mettant ces valeurs dans la seconde, elle devient $\frac{d\zeta}{dx} + \frac{\zeta}{x} - \frac{c}{x^3} = 0$, & donne $\zeta = -\frac{c}{x^2} + \frac{b}{x}$. Cette valeur de ζ ne peut satisfaire à la premiere équation qu'en faisant la constante arbitraire $b = 0$; de plus on peut prendre $c = 1$; donc la proposée a pour intégrale complette $z = -\frac{1}{x^2}[F:(x+ay\sqrt{2}) + f:(x-ay\sqrt{2})] + \frac{1}{x}[F':(x+ay\sqrt{2}) + f':(x-ay\sqrt{2})]$.

Maintenant soit proposée l'équation plus générale $\frac{1}{a^2}\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{b}{x}\frac{du}{dx} + \frac{cu}{x^2}$; si on fait $u = zx^{-\frac{b}{2}}$, on la transformera en celle-ci, $\frac{1}{a^2}\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{hz}{x^2}$, ou $h = c - \frac{b}{2}\left(\frac{b}{2} - 1\right)$.

Ayant fait pour abréger $F:(x+ay) + f:(x-ay) = \Pi$, on supposera $z = \zeta\Pi + \nu\Pi' + \delta\Pi'' +$

$\iota\pi''+\&c$, & on aura pour déterminer ces coefficiens cette suite d'équations,

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2}+\frac{h\zeta}{x^2}=0,$$
$$\frac{d^2\nu}{dx^2}+\frac{h\nu}{x^2}+2\frac{d\zeta}{dx}=0,$$
$$\frac{d^2\delta}{dx^2}+\frac{h\delta}{x^2}+2\frac{d\nu}{dx}=0,$$

&c. On tirera de la premiere $\zeta=x^\lambda$, λ étant donné par l'équation $\lambda(\lambda-1)+h=0$; alors la seconde équation de la suite précédente deviendra $\frac{d^2\nu}{dx^2}-\lambda(\lambda-1)\frac{\nu}{x^2}+2\lambda x^{\lambda-1}=0$, à laquelle on satisfera en prenant $\nu=-x^{\lambda+1}$. La troisiéme équation deviendra $\frac{d^2\delta}{dx^2}-\lambda(\lambda-1)\frac{\delta}{x^2}-2(\lambda+1)x^\lambda=0$, dans laquelle si l'on fait $\delta=hx^{\lambda+2}$, on trouvera $h=\frac{\lambda+1}{2\lambda+1}$. On formera une quatriéme équation $\frac{d^2\epsilon}{dx^2}-\lambda(\lambda-1)\frac{\epsilon}{x^2}+2h(\lambda+2)x^{\lambda-1}=0$, à laquelle on satisfera en prenant $\epsilon=h1\,x^{\lambda+3}$, & on aura $h1=-\frac{h(\lambda+2)}{3\lambda+3}$. On en formera une cinquiéme $\frac{d^2\theta}{dx^2}-\lambda(\lambda-1)\frac{\theta}{x^2}+2h1(\lambda+3)x^{\lambda+2}=0$, qui donnera $\theta=h2\,x^{\lambda+4}$ & $h2=-\frac{h1(\lambda+3)}{4\lambda+6}$. Le coefficient suivant sera $h3\,x^{\lambda+5}$ ou $h3=-\frac{h2(\lambda+4)}{5\lambda+10}$; celui qui viendra ensuite sera $h4\,x^{\lambda+6}$ ou $h4=-$

$\frac{h \, 3 \, (\lambda + 5)}{6\lambda + 15}$; &c. Enfin la ſérie qu'on trouvera pour la valeur complette de z, ſera telle qu'elle ſe terminera toutes les fois que λ ſera un nombre entier négatif.

M. d'Alembert, dans le Mémoire ſur le Calcul Intégral qui ſe trouve dans le quatriéme volume de ſes Opuſcules, ſe propoſe une équation de cette forme $b \frac{d^2 z}{dy^2} + \frac{d^2 z}{dx^2} + X \frac{dz}{dx} + X' z = 0$, où X & X' ſont des fonctions de x, & b une conſtante quelconque. On trouvera $\omega = x + y \sqrt{\frac{-1}{b}}$, $\omega 1 = x - y \sqrt{\frac{-1}{b}}$, & ſi ζ, $\varkappa$, &c, ne doivent renfermer de variable que x, on aura $E(\zeta) = \frac{d^2 \zeta}{dx^2} + X \frac{d\zeta}{dx} + X' \zeta$, $e(\zeta) = e'(\zeta) = 2 \frac{d\zeta}{dx} + X \zeta$, & par conſéquent $\zeta 1 = \zeta$, $\varkappa 1 = \varkappa$, &c. Ces coefficiens ζ, $\varkappa$, &c ſeront donnés par les équations

$$\frac{d^2 \zeta}{dx^2} + X \frac{d\zeta}{dx} + X' \zeta = 0,$$

$$\frac{d^2 \varkappa}{dx^2} + X \frac{d\varkappa}{dx} + X' \varkappa + 2 \frac{d\zeta}{dx} + X \zeta = 0,$$

$$\frac{d^2 \delta}{dx^2} + X \frac{d\delta}{dx} + X' \delta + 2 \frac{d\varkappa}{dx} + X \varkappa = 0,$$

&c. Il y aura une équation de condition pour que la valeur complette de z ſoit finie; par exemple, ayant fait pour abréger $F : \left(x + y \sqrt{\frac{-1}{b}}\right) + f : \left(x - y \sqrt{\frac{-1}{b}}\right) = \Pi$, ſi elle doit être $z = \zeta \Pi$,

l'équation de condition fera $2\frac{d\zeta}{dx}+X\zeta=0$, fi elle doit être $z=\zeta\Pi+\varepsilon\Pi'$, l'équation de condition fera $2\frac{d\varepsilon}{dx}+X\varepsilon=0$; & ainfi de fuite. Tout cela eft bien conforme à ce que trouve M. d'Alembert dans le Mémoire cité. Il remarque encore que fi la premiere des équations précédentes eft intégrable, les autres le feront néceffairement, comme nous l'avons démontré dans l'article 49. Nous ajouterons qu'il auroit pu arriver que les deux racines de l'équation qui renferme r fuffent égales, & qu'on eût eu $\omega 1=\omega$; alors $z=\zeta\Pi+\varepsilon\Pi'+$&c n'auroit point été l'intégrale complette de la propofée, puifqu'elle n'auroit renfermé qu'une fonction arbitraire. Lorfqu'un cas femblable fe préfentera, il faudra chercher deux valeurs de chacun des coefficiens ζ, ε, &c; fi ces valeurs font ζ & $\zeta 1$, ε & $\varepsilon 1$, &c, on aura pour l'intégrale complette $z=\zeta F:(\omega)+\varepsilon F':(\omega)+$&c$+\zeta 1 f:(\omega)+\varepsilon 1 f':(\omega)+$&c.

L'équation du troifieme ordre

$$A\frac{d^3z}{dy^3}+B\frac{d^3z}{dy^2dx}+C\frac{d^3z}{dydx^2}+D\frac{d^3z}{dx^3}+Vz=0,$$
$$+B'\frac{d^2z}{dy^2}+C'\frac{d^2z}{dydx}+D'\frac{d^2z}{dx^2}$$
$$+C''\frac{dz}{dy}+D''\frac{dz}{dx}$$

étant propofée; fi r, $r1$, $r2$ font les racines de l'équation du troifiéme degré $Ar^3+Br^2+Cr+D=0$, & ω, $\omega 1$, $\omega 2$ des quantités données par les équations $\frac{d\omega}{dy}=r\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d\omega 1}{dy}=r1\frac{d\omega 1}{dx}$, $\frac{d\omega 2}{dy}=$

$r\,2\frac{d\omega 2}{dx}$; la propofée aura pour intégrale complette

$$\begin{aligned}z = {} & \beta F:(\omega) + \gamma F':(\omega) + \delta F'':(\omega) + \epsilon F''':(\omega) + \&c.\\ & \beta 1 f:(\omega 1) + \gamma 1 f':(\omega 1) + \delta 1 f'':(\omega 1) + \epsilon 1 f''':(\omega 1) + \&c\\ & \beta 2 \varphi:(\omega 2) + \gamma 2 \varphi':(\omega 2) + \delta 2 \varphi'':(\omega 2) + \epsilon 2 \varphi''':(\omega 2) + \&c\end{aligned}$$

Les coefficiens β, γ, &c, devront être tels qu'ils fatisfaffent aux équations

$$E(\beta) = 0,$$
$$E(\gamma) + e(\beta) = 0,$$
$$E(\delta) + e(\gamma) + \iota(\beta) = 0,$$
$$E(\epsilon) + e(\delta) + \iota(\gamma) = 0, \ \&c,$$

où $e(\beta) = A\left(3\frac{d\omega}{dy}\frac{d^2\beta}{dy^2} + 3\frac{d^2\omega}{dy^2}\frac{d\beta}{dy} + \beta\frac{d^3\omega}{dy^3}\right) + B\left(2\frac{d\omega}{dy}\frac{d^2\beta}{dydx} + 2\frac{d^2\omega}{dydx}\frac{d\beta}{dy} + \frac{d^2\omega}{dy^2}\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\omega}{dx}\frac{d^2\beta}{dy^2} + \beta\frac{d^3\omega}{dy^2dx}\right) + C\left(2\frac{d^2\beta}{dydx} + 2\frac{d^2\omega}{dydx}\frac{d\beta}{dx} + \frac{d^2\omega}{dx^2}\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\omega}{dy}\frac{d^2\beta}{dx^2} + \beta\frac{d^3\omega}{dydx^2}\right) + D\left(3\frac{d\omega}{dx}\frac{d^2\beta}{dx^2} + 3\frac{d^2\omega}{dx^2}\frac{d\beta}{dx} + \beta\frac{d^3\omega}{dx^3}\right) + B'\left(2\frac{d\omega}{dy}\frac{d\beta}{dy} + \beta\frac{d\omega}{dy^2}\right) + C'\left(\frac{d\omega}{dy}\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\omega}{dx}\frac{d\beta}{dy} + \beta\frac{d^2\omega}{dydx}\right) + D'\left(2\frac{d\omega}{dx}\frac{d\beta}{dx} + \beta\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + C''\beta\frac{d\omega}{dy} + D''\beta\frac{d\omega}{dx}$, $\iota(\beta) = A\left(3\beta\frac{d\omega}{dy}\frac{d^2\omega}{dy^2} + 3\frac{d\beta}{dy}\left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2\right) + B\left(2\beta\frac{d\omega}{dy}\frac{d^2\omega}{dydx} + 2\frac{d\beta}{dy}\frac{d\omega}{dy}\frac{d\omega}{dx} + \beta\frac{d\omega}{dx}\frac{d^2\omega}{dy^2} + \frac{d\beta}{dx}\left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2\right)$

$+C\left(2\zeta\frac{d\omega}{dx}\frac{d^2\omega}{dydx}+2\frac{d\zeta}{dx}\frac{d\omega}{dx}\frac{d\omega}{dy}+\zeta\frac{d\omega}{dy}\right.$
$\frac{d^2\omega}{dx^2}+\frac{d\zeta}{dy}\left.\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right)+D\left(3\zeta\frac{d\omega}{dx}\frac{d\omega}{dx^2}+\right.$
$3\frac{d\zeta}{dx}\left.\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right)+B'\zeta\left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2+C'\zeta\frac{d\omega}{dy}\frac{d\omega}{dx}+$
$D'\zeta\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2.$

On trouvera les équations propres à déterminer les coefficiens $\zeta 1$, $\varkappa 1$, &c, en mettant dans celles qui précédent, $\omega 1$, $\zeta 1$, $\varkappa 1$, &c, pour ω, ζ, $\varkappa$, &c; il en sera de même des coefficiens $\zeta 2$, $\varkappa 2$, &c. Cela posé, il est clair qu'il y aura deux équations de condition pour que chacune des trois suites soit finie. Par exemple, si la premiere doit se réduire à $\zeta F:(\omega)$, on trouvera ζ au moyen de l'équation linéaire du premier ordre $\epsilon(\zeta)=0$; & cette valeur de ζ devra satisfaire aux deux équations $e(\zeta)=0$, $E(\zeta)=0$. Si la premiere suite doit se réduire à $\zeta F:(\omega)+\varkappa F':(\omega)$, on trouvera $\varkappa$ par l'équation du premier ordre $\epsilon(\varkappa)=0$; puis ζ par l'équation $e(\zeta)+\epsilon(\varkappa)=0$, qui n'est aussi que du premier ordre par rapport à lui; & ces valeurs de ζ & $\varkappa$ devront satisfaire aux équations $E(\varkappa)+e(\zeta)=0$, $E(\zeta)=0$, &c. J'ai fait beaucoup d'autres applications des deux méthodes d'intégrer les équations aux différences partielles, dans le Mémoire dont j'ai extrait ces six articles; mais je ne pourrois pas m'étendre davantage sur cette matiere, quelqu'importante qu'elle soit, sans sortir des bornes que je dois prescrire à ces Leçons.

89. M. de la Grange, dans le Mémoire dont nous avons fait usage n°. 75, se propose de trouver les solutions particulieres des équations aux différences

partielles. Soit, dit ce ſavant Géométre, l'équation $V=0$ entre x, y, z & deux conſtantes arbitraires a & b; on en tirera $\frac{dV}{dy}=0$, $\frac{dV}{dx}=0$, puis en éliminant ces deux conſtantes arbitraires au moyen des deux équations précédentes & de $V=0$, on aura une équation entre x, y, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ qu'on repréſentera par $Z=0$. Ayant, par exemple, l'équation $z=a+bx+mby$, on en tirera $\frac{dz}{dx}=b$, $\frac{dz}{dy}=mb$, & l'équation aux différences partielles $\frac{dz}{dy}=m\frac{dz}{dx}$, à laquelle on ſatisfera en prenant $z=a+b(x+my)$, a & b étant deux conſtantes arbitraires.

Quand a & b n'auroient point été conſtans, le réſultat de l'élimination auroit toujours été le même, ſi on eut eu $\frac{dz}{da}da+\frac{dz}{db}db=0$. Donc en prenant pour a & b des fonctions variables telles que $\frac{dz}{da}da+\frac{dz}{db}db=0$, & ſubſtituant ces valeurs dans $V=0$, on aura une équation qui ſatisfera encore à $Z=0$.

La maniere la plus ſimple d'avoir $\frac{dz}{da}da+\frac{dz}{db}db=0$, c'eſt de faire $\frac{dz}{da}=0$ & $\frac{dz}{db}=0$; on tirera de ces équations les valeurs correſpondantes de a & b, qui étant ſubſtituées dans $V=0$, donneront autant de ſolutions particulieres de la propoſée.

Si, par exemple, la proposée est $z = y\frac{dz}{dy} + x\frac{dz}{dx} + h\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}$; à cause de $z = ax + by + h\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}$ qui satisfait à cette équation, on a $\frac{dz}{da} = x + \frac{ha}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}} = 0$, $\frac{dz}{db} = y + \frac{hb}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}} = 0$; d'où l'on tire $b = \frac{-y}{\sqrt{(h^2 - x^2 - y^2)}}$, $a = \frac{-x}{\sqrt{(h^2 - x^2 - y^2)}}$, & pour solution particuliere $z = \sqrt{(h^2 - x^2 - y^2)}$.

En rapprochant tout cela de ce qui est démontré n°. 75, sur les équations différentielles, on verra que l'équation aux différences partielles $Z = 0$ étant proposée, si après l'avoir différentiée & fait disparoître les fractions, on a $Md\frac{dz}{dx} + Nd\frac{dz}{dy} + Pdx + Qdy = 0$, M, N, P, Q étant des fonctions connues & entieres de x, y, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, dont on fera chacune $= 0$; on verra, dis-je, que toutes ces équations étant combinées avec $Z = 0$, donneront par l'élimination de $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$ trois équations entre x, y, z qui devront avoir lieu en même-tems ; & par conséquent, que si ces équations ont un facteur commun, il sera la solution particuliere demandée, sinon la proposée n'en admettra pas.

Si l'équation $Z = 0$ étoit telle qu'on eut par la différentiation $Ad\frac{dz}{dx} + Bd\frac{dz}{dy} = 0$, on n'auroit alors

alors que les deux équations $A=0$, $B=0$, qui serviroient à éliminer $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$ dans $Z=0$, & l'équation résultante seroit toujours la solution particuliere demandée. L'équation $z=y\frac{dz}{dy}+x\frac{dz}{dx}+h\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}$, qui devient par la différentiation $0=yd\frac{dz}{dy}+xd\frac{dz}{dx}+h\frac{\frac{dz}{dy}d\frac{dz}{dy}+\frac{dz}{dx}d\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}}$, est dans ce cas-là. On en tire les deux équations $y\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}+h\frac{dz}{dy}=0$, $x\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}+h\frac{dz}{dx}=0$, qui donnent d'abord $x\frac{dz}{dy}=y\frac{dz}{dx}$; puis $\frac{dz}{dy}=\frac{\mp y}{\sqrt{(h^2-x^2-y^2)}}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{\mp x}{\sqrt{(h^2-x^2-y^2)}}$, & $\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}=\frac{\pm h}{\sqrt{(h^2-x^2-y^2)}}$. Donc si l'on fait ces substitutions dans la proposée, on aura pour la solution particuliere demandée $z=\pm\sqrt{(h^2-x^2-y^2)}$.

Pour satisfaire à l'équation $\frac{dz}{da}da+\frac{dz}{db}db=0$, nous avons fait $\frac{dz}{da}=0$, $\frac{dz}{db}=0$; cette supposition

eſt trop limitée. En effet, ſi on ſuppoſe $b = \phi : (a)$; l'équation $\frac{dz}{da} da + \frac{dz}{db} db = 0$ deviendra $\frac{dz}{da} + \frac{dz}{db} \phi' : (a) = 0$; au moyen de laquelle, ſi on élimine a dans l'équation $V = 0$, l'équation réſultante de cette élimination ſatisfera également à l'équation $Z = 0$. Cette équation réſultante renfermera une fonction arbitraire, & ſera par conſéquent l'intégrale complette de $Z = 0$. Ainſi étant donnée l'équation $V = 0$, qui ſatisfait à $Z = 0$, & qui renferme deux conſtantes arbitraires, on en conclura l'intégrale complette de $Z = 0$; il ſuffira pour cela de regarder une des conſtantes comme fonction de l'autre, & d'éliminer cette autre au moyen de $V = 0$ & de $\frac{dz}{da} + \frac{dz}{db} \phi' : (a) = 0$.

Pour en donner un exemple bien ſimple, ſoit propoſé d'intégrer complettement l'équation aux différences partielles $\frac{dz}{dy} = m \frac{dz}{dx}$, à laquelle ſatisfait $z = a + b(x + my)$ qui renferme deux conſtantes arbitraires a & b. On tire de cette derniere équation $\frac{dz}{da} = 1$, $\frac{dz}{db} = x + my$ & $da + (x + my) db = 0$, qui donne, lorſqu'on ſuppoſe $a = \phi : (b)$, $\phi' : (b) + x + my = 0$. Donc b & a ſont des fonctions de $x + my$; & par conſéquent $a + b(x + my)$ eſt une fonction de la même quantité que je puis repréſenter par $F : (x + my)$. D'où il ſuit que $z = F : (x + my)$ eſt l'intégrale complette demandée, ce qui s'accorde bien avec ce que nous ſavions déja.

Si $V=0$ eſt une équation entre x, y, z & les cinq conſtantes arbitraires a, b, c, g, h, on en pourra déduire une équation aux différences partielles du ſecond ordre. Etant donné, par exemple, $z = a+bx+cy+hx^2+gxy+mhy^2$; on en tirera $\frac{dz}{dy}=c+gx+2mhy$, $\frac{dz}{dx}=b+2hx+gy$, $\frac{d^2z}{dy^2}=2mh$, $\frac{d^2z}{dxdy}=g$, $\frac{d^2z}{dx^2}=2h$, & l'équation du ſecond ordre $\frac{d^2z}{dy^2}=m\frac{d^2z}{dx^2}$.

Nommons $Z'=0$ l'équation du ſecond ordre qu'on tirera de $V=0$ en opérant comme nous venons de faire. Mais cette méme équation $V=0$ ſervira à trouver

$$\frac{dz}{da}da+\frac{dz}{db}db+\frac{dz}{dc}dc+\frac{dz}{dh}dh+\frac{dz}{dg}dg,$$

$$\frac{d^2z}{dxda}da+\frac{d^2z}{dxdb}db+\frac{d^2z}{dxdc}dc+\frac{d^2z}{dxdh}dh+\frac{d^2z}{dxdg}dg,$$

$$\frac{d^2z}{dyda}da+\frac{d^2z}{dydb}db+\frac{d^2z}{dydc}dc+\frac{d^2z}{dydh}dh+\frac{d^2z}{dydg}dg,$$

qu'on fera chacun égal à zero. Avec ces trois équations on éliminera deux des différentielles; puis dans l'équation réſultante, on égalera à zero les coefficiens des différentielles qui reſteront. De cette maniere, on aura trois équations, qui, avec $V=0$, $\frac{dV}{dy}=0$; $\frac{dV}{dx}=0$, ſerviront à éliminer les cinq conſtantes

$Z=0$, on éliminera a & b, & la résultante sera la solution particuliere demandée.

S'il s'agit de trouver la solution particuliere de $Z'=0$, sans connoître $Z=0$; de $Z'=0$, on tirera par la différentiation, $M d\frac{d^2 z}{dy^2}+N d\frac{d^2 z}{dy\,dx}+P d\frac{d^2 z}{dx^2}+$ $Q dy+R dx=0$, & on fera $M=0$, $N=0$, $P=0$, $Q=0$, $R=0$. Ces cinq équations seront combinées avec $Z'=0$, en sorte que $\frac{d^2 z}{dy^2}$, $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2 z}{dx^2}$ disparoissent; & il résultera trois équations entre y, x, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$ qui devront avoir lieu en même-tems, ou qui devront avoir un facteur commun pour que la proposée soit susceptible d'une solution particuliere; ce facteur commun sera lui-même la solution particuliere demandée.

Il pourroit arriver qu'on eût $dZ'=A d\frac{d^2 z}{dy^2}+$ $B d\frac{d^2 z}{dy\,dx}+C d\frac{d^2 z}{dx^2}$; alors les trois équations $A=0$, $B=0$, $C=0$, serviroient à éliminer $\frac{d^2 z}{dy^2}$, $\frac{d^2 z}{dy\,dx}$, $\frac{d^2 z}{dx^2}$ dans $Z'=0$; & la résultante seroit la solution particuliere demandée.

Enfin ayant $Z=0$, on trouvera facilement l'intégrale complette aux premieres différences de $Z'=0$. Car ayant fait $\frac{dZ}{da}da+\frac{dZ}{db}db=0$, si l'on suppose $b=\phi:(a)$, on aura $\frac{dZ}{da}+\frac{dZ}{db}\phi':(a)=0$, laquelle servira à éliminer a dans $Z=0$, qui alors

renfermera une fonction arbitraire, & sera par conséquent l'intégrale complette demandée.

Je prendrai pour exemple $\frac{d^2z}{dy^2} - A\frac{d^2z}{dydx} + B\frac{d^2z}{dx^2} = 0$, à laquelle satisfait $\frac{dz}{dy} - m\frac{dz}{dx} = a + b(x+ny)$. On tirera de celle-ci $\frac{dZ}{da} = 1$, $\frac{dZ}{db} = x + ny$, & par conséquent $\phi' : (a) = \frac{-1}{x+ny}$. Donc a, b & $a + b(x+ny)$ font des fonctions de $x + ny$; & on a pour l'intégrale complette demandée $\frac{dz}{dy} - m\frac{dz}{dx} = f:(x+ny)$. Si on fût parti de $\frac{dz}{dy} - n\frac{dz}{dx} = h + g(x+my)$, on auroit trouvé $\frac{dz}{dy} - n\frac{dz}{dx} = F:(x+my)$. Ainsi la proposée a deux intégrales premieres complettes qui serviront à trouver la valeur complette de z. &c.



CHAPITRE XI.

De l'intégration des équations aux différences finies.

90. M. LE Marquis de Condorcet, dans le volume de l'Académie de 1770, a donné les équations de condition qui doivent avoir lieu, pour qu'une fonction C aux différences finies, d'un ordre quelconque, & comprenant un nombre quelconque de variables, soit la différence exacte d'une fonction de l'ordre immédiatement inférieur. Il est aussi démontré dans le même Mémoire, que ces équations seroient celles qui auroient lieu entre les variables, si C n'étant point une différence exacte, ΣC devoit être un *maximum* ou un *minimum*. Voici une maniere bien simple de parvenir aux mêmes résultats.

Puisque par l'hypothèse C est la différence exacte d'une fonction de l'ordre immédiatement inférieur; nous aurons, en nommant B cette fonction qui sera de l'ordre $n-1$ si, comme nous le supposons, C est de l'ordre n; nous aurons, dis-je, $dC = d\Delta B =$ (n°. 57) ΔdB. Mais $dB = \frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{d\Delta x}d\Delta x + \frac{dB}{d\Delta^2 x}d\Delta^2 x + \&c + \frac{dB}{dy}dy + \&c\ \&c$; ainsi pour trouver ΔdB, il n'est question que de chercher la différence finie de chacun des termes du second membre de l'équation précédente. Or si on veut se rappeller que la différence finie du produit pq des

deux quantités p & q, est égale à $q\Delta p + p\Delta q + \Delta p.\Delta q$; on verra aisément que $\Delta.\frac{dB}{dx}dx = \Delta\frac{dB}{dx}.dx + \frac{dB}{dx}d\Delta x + \Delta\frac{dB}{dx}.d\Delta x$, $\Delta.\frac{dB}{d\Delta x}d\Delta x = \Delta\frac{dB}{d\Delta x}.d\Delta x + \frac{dB}{d\Delta x}d\Delta^2 x + \Delta\frac{dB}{d\Delta x}.d\Delta^2 x$, &c. On aura donc cette suite d'équations

$$\frac{dC}{dx} = \Delta\frac{dB}{dx},$$

$$\frac{dC}{d\Delta x} = \frac{dB}{dx} + \Delta\frac{dB}{dx} + \Delta\frac{dB}{d\Delta x},$$

$$\frac{dC}{d\Delta^2 x} = \frac{dB}{d\Delta x} + \Delta\frac{dB}{d\Delta x} + \Delta\frac{dB}{d\Delta^2 x};$$

$$\frac{dC}{d\Delta^3 x} = \frac{dB}{d\Delta^2 x} + \Delta\frac{dB}{d\Delta^2 x} + \Delta\frac{dB}{d\Delta^3 x},$$

....

$$\frac{dC}{d\Delta^n x} = \frac{dB}{d\Delta^{n-1} x} + \Delta\frac{dB}{d\Delta^{n-1} x}; \text{ \&c.}$$

Ces équations donnent évidemment

$$\frac{dC}{dx} = \Delta\frac{dB}{dx},$$

$$\Delta\frac{dC}{d\Delta x} = \frac{dC}{dx} + \Delta\frac{dC}{dx} + \Delta^2\frac{dB}{d\Delta x};$$

$$\Delta^2\frac{dC}{d\Delta^2 x} = -\frac{dC}{dx} - 2\Delta\frac{dC}{dx} - \Delta^2\frac{dC}{dx} + + \Delta\frac{dC}{d\Delta x} + \Delta^2\frac{dC}{d\Delta x}$$

$$\Delta^3\frac{dB}{d\Delta^2 x}$$

$$\begin{aligned}\Delta^3\frac{d\zeta}{d\Delta^3x} = {} & \frac{d\zeta}{dx}+3\Delta\frac{d\zeta}{dx}+3\Delta^2\frac{d\zeta}{dx}+\Delta^3\frac{d\zeta}{dx}\\ & -\Delta\frac{d\zeta}{d\Delta x}-2\Delta^2\frac{d\zeta}{d\Delta x}-\Delta^3\frac{d\zeta}{d\Delta x}\\ & +\Delta^2\frac{d\zeta}{d\Delta^2x}+\Delta^3\frac{d\zeta}{d\Delta^2 x}\\ & +\Delta^4\frac{dB}{d\Delta^3x};\end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned}\pm\Delta^n\frac{d\zeta}{d\Delta^nx} = {} & \frac{d\zeta}{dx}+n\Delta\frac{d\zeta}{dx}+n.\frac{n-1}{2}\Delta^2\frac{d\zeta}{dx}\\ & -\Delta\frac{d\zeta}{d\Delta x}-(n-1)\Delta^2\frac{d\zeta}{d\Delta x}\\ & +\Delta^2\frac{d\zeta}{d\Delta^2x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & +n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\Delta^3\frac{d\zeta}{dx}+\ldots+\Delta^n\frac{d\zeta}{dx}.\\ & -(n-1)\frac{n-2}{2}\Delta^3\frac{d\zeta}{d\Delta x}-\ldots-\Delta^n\frac{d\zeta}{d\Delta x}\\ & +(n-2)\Delta^3\frac{d\zeta}{d\Delta^2x}+\ldots+\Delta^n\frac{d\zeta}{d\Delta^2x}\\ & -\Delta^3\frac{d\zeta}{d\Delta^3x}-\ldots-\Delta^n\frac{d\zeta}{d\Delta^3x}\\ & \&c\end{aligned}$$

La derniere équation eſt une des équations de condition demandées; on trouvera les autres de la même maniere, & il y en aura autant que de variables.

Maintenant, ζ étant toujours une fonction de l'ordre n, on demande les équations qui ont lieu entre les variables, lorſque $\Sigma\zeta$ doit être un *maximum* ou un

minimum. La nature du Problême donne (n°. 57) $\delta\Sigma\zeta = \Sigma\delta\zeta = 0$. Mais $\delta\zeta = \frac{d\zeta}{dx}\delta x + \frac{d\zeta}{d\Delta x}\Delta\delta x + \frac{d\zeta}{d\Delta x}\Delta^2\delta x +$ &c &c, car $\delta\Delta x = \Delta\delta x$, $\delta\Delta^2 x = \Delta^2\delta x$, &c, comme nous l'avons démontré dans l'article cité. De plus, par un Théorême du même article

$$\Sigma\frac{d\zeta}{d\Delta x}\Delta\delta x = \frac{d\zeta}{d\Delta x}\delta x - \Sigma\left(\Delta\frac{d\zeta}{d\Delta x}.\delta x'\right),$$

$$\Sigma\frac{d\zeta}{d\Delta^2 x}\Delta^2\delta x = \frac{d\zeta}{d\Delta^2 x}\Delta\delta x - \Delta\frac{d\zeta}{d\Delta^2 x}.\delta x' + \Sigma\left(\Delta^2\frac{d\zeta}{d\Delta^2 x}.\delta x''\right),$$

&c &c. On a donc, en n'ayant égard qu'aux termes qui se trouvent sous le signe Σ, l'équation $\Sigma\left(\frac{d\zeta}{dx}\delta x - \Delta\frac{d\zeta}{d\Delta x}.\delta x' + \Delta^2\frac{d\zeta}{d\Delta^2 x}.\delta x'' - \ldots\ldots \pm \Delta^n\frac{d\zeta}{d\Delta^n x}\delta x^{n'}\ \&c\right) = 0$, qui n'est autre que

$$\Sigma\left\{\left(\left[\frac{d\zeta}{dx}\right]^{n'} - \left[\Delta\frac{d\zeta}{d\Delta x}\right]^{(n-1)'} + \left[\Delta^2\frac{d\zeta}{d\Delta^2 x}\right]^{(n-2)'} - \ldots\ldots\ldots \pm \Delta^n\frac{d\zeta}{d\Delta^n x}\right)\delta x^{n'}\ \&c\right\} = 0.$$

Or si les variations $\delta x^{n'}$, $\delta y^{n'}$, &c doivent être indépendantes les unes des autres, on trouvera, en égalant à zero, chacun de leurs coefficiens, les équations de *maximum* & de *minimum*, qui seront en même nombre que les variables.

Il ſuit du Théorême démontré n°. 7 que

$$\left[\frac{d\mathcal{C}}{dx}\right]^{n'} = \frac{d\mathcal{C}}{dx} + n\,\Delta\,\frac{d\mathcal{C}}{dx} + n\,.\,\frac{n-1}{2}\,\Delta^2\,\frac{d\mathcal{C}}{dx}$$

$$+\,\ldots\ldots\ldots\ldots + \Delta^n\,\frac{d\mathcal{C}}{dx},$$

$$\left[\Delta\,\frac{d\mathcal{C}}{d\Delta x}\right]^{(n-n)'} = \Delta\,\frac{d\mathcal{C}}{d\Delta x} + (n-1)\,\Delta^2\,\frac{d\mathcal{C}}{d\Delta x}$$

$$+\,\ldots\ldots\ldots\ldots + \Delta^n\,\frac{d\mathcal{C}}{d\Delta x},$$

$$\left[\Delta^2\,\frac{d\mathcal{C}}{d\Delta^2 x}\right]^{(n-2)'} = \Delta^2\,\frac{d\mathcal{C}}{d\Delta^2 x}$$

$$+\,\ldots\ldots\ldots\ldots + \Delta^n\,\frac{d\mathcal{C}}{d\Delta^2 x},$$

&c. Donc, en faiſant les ſubſtitutions convenables on aura

$$\frac{d\mathcal{C}}{dx} + n\,\Delta\,\frac{d\mathcal{C}}{dx} + n\,.\,\frac{n-1}{2}\,\Delta^2\,\frac{d\mathcal{C}}{dx} + \ldots\ldots +$$

$$\Delta^n\,\frac{d\mathcal{C}}{dx}$$

$$-\,\Delta\,\frac{d\mathcal{C}}{d\Delta x} - (n-1)\,\Delta^2\,\frac{d\mathcal{C}}{d\Delta x} - \ldots\ldots -$$

$$\Delta^n\,\frac{d\mathcal{C}}{d\Delta x}$$

$$+\,\Delta^2\,\frac{d\mathcal{C}}{d\Delta^2 x} + \ldots\ldots +$$

$$\Delta^n\,\frac{d\mathcal{C}}{d\Delta^2 x}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pm\,\Delta^n\,\frac{d\mathcal{C}}{d\Delta^n x} = 0,$$

qui eſt une des équations de *maximum* ou de *minimum*. On voit auſſi que cette équation eſt une de celles que nous venons de démontrer devoir être identiques,

pour que ζ soit la différence exacte d'une fonction de l'ordre immédiatement inférieur.

Toutes les questions de *maximis* & *minimis* relatives à la précédente, pourront toujours se réduire à trouver la variation d'une fonction π qui n'est donnée que par une équation aux différences finies $\Pi = 0$ de l'ordre n. Soit $\delta\Pi = A\delta\pi + B\Delta\delta\pi + C\Delta^2\delta\pi$ $+ \&c + M\delta x + N\Delta\delta x + P\Delta^2\delta x + \&c \&c = 0$. Je multiplie cette équation par un facteur ψ, & je trouve $\Sigma(A\psi\delta\pi + B\psi\Delta\delta\pi + C\psi\Delta^2\delta\pi + \&c + M\psi\delta x$ $+ N\psi\Delta\delta x + P\psi\Delta^2\delta x + \&c \&c) =$ constante, que je transformerai facilement en celle-ci :

$$\Sigma([A\psi]^{n'} - [\Delta.B\psi]^{(n-1)'} + [\Delta^2.C\psi]^{(n-2)'} -$$
$$\&c)\,\delta\pi^{n'}$$
$$+ B\psi\delta\pi - \Delta.C\psi.\delta\pi' + \&c$$
$$+ C\psi\Delta\delta\pi - \&c$$
$$\&c = \text{constante} - (\Delta') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Sigma\{([M\psi]^{n'} - [\Delta.N\psi]^{(n-1)'} + [\Delta^2.P\psi]^{(n-2)'} -$$
$$\&c)\,\delta x^{n'}\ \&c\}$$
$$+ N\psi\delta x - \Delta.P\psi.\delta x' + \&c$$
$$+ P\psi\Delta\delta x - \&c$$
$$\&c\ \&c.$$

Je ferai $[A\psi]^{n'} - [\Delta.B\psi]^{(n-1)'} + [\Delta^2.C\psi]^{(n-2)'}$ $- \&c = 0$, ou

$$\left.\begin{array}{l} A\psi + n\Delta.A\psi + n.\frac{n-1}{2}\Delta^2.A\psi + \&c \\ \quad - \Delta.B\psi - (n-1)\Delta^2.B\psi - \&c \\ \quad + \qquad\qquad \Delta^2.C\psi + \&c \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \&c \end{array}\right\} = 0;$$

& le Problême sera réduit à trouver la valeur complette de ψ dans cette équation de l'ordre n qui est linéaire par rapport à cette quantité. (Voyez le n°. 63.)

91. On a vu (n°. 56) la maniere d'intégrer complettement les équations linéaires du premier ordre aux différences finies. Maintenant, soit proposée l'équation linéaire du second ordre $Ay + B\Delta y + C\Delta^2 y = X$, où A, B, C, X sont fonctions de x seul, & où Δx est pris pour l'unité. L'ayant multipliée par un facteur σ, je l'intégre, ce qui me donne $\Sigma(A\sigma y + B\sigma\Delta y + C\sigma\Delta^2 y) = \Sigma\sigma X +$ constante. Mais

$$\Sigma B\sigma\Delta y = B\sigma y - \Sigma[\Delta . B\sigma . y'],$$
$$\Sigma C\sigma\Delta^2 y = C\sigma\Delta y - \Delta . C\sigma . y' + \Sigma[\Delta^2 . C\sigma . y''];$$

donc l'équation précédente devient $\Sigma(A\sigma y - \Delta . B\sigma . y' + \Delta^2 . C\sigma . y'') + B\sigma y - \Delta . C\sigma . y' + C\sigma\Delta y = \Sigma\sigma X +$ constante. On voit aussi que

$$\Sigma A\sigma y = \Sigma A''\sigma'' y'' - A'\sigma' y' - A\sigma y;$$
$$\Sigma\Delta . B\sigma . y' = \Sigma\Delta . B'\sigma' . y'' - \Delta . B\sigma . y';$$

& que par ces substitutions l'équation dont il s'agit est changée en celle-ci :

$$\Sigma(A''\sigma'' - \Delta . B'\sigma' + \Delta^2 . C\sigma)y'' + (K) \ldots\ldots\ldots (B - A)\sigma y - (A'\sigma' - \Delta . (B - C)\sigma)y' + C\sigma\Delta y - \Sigma\sigma X = a,$$

a étant la constante arbitraire ajoutée en intégrant. Je ferai

$$A''\sigma'' - \Delta . B'\sigma' + \Delta^2 . C\sigma = 0,$$

& cette équation servira à déterminer le facteur σ; alors $K = a$ sera l'intégrale premiere complette de la proposée. De plus, si l'on veut faire attention que

$$A''\sigma'' = A''\sigma + 2A''\Delta\sigma + A''\Delta^2\sigma,$$
$$\Delta . B'\sigma' = \Delta B' . \sigma' + B''\Delta\sigma' = \Delta B' . \sigma + (\Delta B' + B'')\Delta\sigma + B''\Delta^2\sigma,$$
$$\Delta^2 . C\sigma = \Delta^2 C . \sigma + 2\Delta C' . \Delta\sigma + C''\Delta^2\sigma;$$

on verra que l'équation qui renferme σ n'est autre que (A) ....

$$\begin{array}{lll} A''.\sigma + & 2A''.\Delta\sigma + A''.\Delta^2\sigma = 0. & \\ -\Delta B' & -\Delta B' & -B'' \\ +\Delta^2 C & -\ \ B'' & +C'' \\ & +2\Delta C' & \end{array}$$

Je représenterai celle-ci par $A\,1\,\sigma + B\,1\,\Delta\sigma + C\,1\,\Delta^2\sigma = 0$; &, l'ayant multipliée par un facteur Ψ'', je l'intégrerai comme j'ai fait la proposée, ce qui me donnera $(K\,2)$....................
$(B\,1 - A\,1)\Psi''\sigma - (A'\,1\,\Psi''' - \Delta.(B\,1 - C\,1)\Psi'')\sigma' + C\,1\,\Psi''\Delta\sigma = b$,
b étant la constante arbitraire ajoutée en intégrant. Puis j'aurai, pour déterminer Ψ'', l'équation

$$\begin{array}{lll} A''1.\Psi'' + 2 & A''1.\Delta\Psi'' + A''1.\Delta^2\Psi'' = 0, & \\ -\Delta B'1 & -\ \Delta B'1 & -B''1 \\ +\Delta^2 C\,1 & -\ \ B''1 & +C''1 \\ & +2\Delta C'1 & \end{array}$$

qu'on verra aisément, en mettant pour $A''1$, $B'1$, $B''1$, $C1$, $C'1$, $C''1$ leurs valeurs, être la même que $A''\Psi'' + B''\Delta\Psi'' + C''\Delta^2\Psi'' = 0$, qui donnera (B)...
$A\Psi + B\Delta\Psi + C\Delta^2\Psi = 0$.

Lorsqu'on connoîtra le facteur Ψ, on intégrera complettement l'équation $K\,2 = b$, ce qui est toujours possible, puisqu'elle n'est que du premier ordre. Or, comme la valeur de σ, qu'on trouvera de cette maniere, renfermera deux constantes arbitraires; on aura, en faisant successivement une de ces constantes égale à zero, & l'autre égale à 1, deux valeurs particulieres de σ, qui étant substituées successivement dans l'équation $K = a$, donneront les deux intégrales premieres complettes de la proposée, au moyen des-

quelles on pourra chasser Δy, & avoir la valeur complette de y. Mais l'équation B n'est autre que la proposée dans laquelle on auroit fait $X=0$; donc tout est réduit, comme lorsqu'il n'étoit question que de différentielles (nº. 49), à trouver une seule valeur de y qui satisfasse à la proposée dans le cas de $X=0$.

Soient A, B, C des quantités constantes. On satisfera à l'équation B en prenant $\psi=\beta^x$, d'où l'on tirera $\Delta\psi=\beta^x(\beta-1)$, $\Delta^2\psi=\beta^x(\beta-1)^2$; & β sera donnée par l'équation du second degré $A-B+C+(B-2C)\beta+C\beta^2=0$. Alors, à cause de $\psi''=\beta^{x+2}$, $\Delta\psi''=\beta^{x+2}(\beta-1)$, $\psi'''=\beta^{x+3}$, l'équation $K2=b$ deviendra $[C1-A1-(A1-B1+C1)\beta]\sigma-[(A1-B1+C1)\beta+B1-2C1]\Delta\sigma=\frac{b}{\beta^{x+2}}$, ou $[C-B-C\beta]\sigma-[C\beta+B-2C]\Delta\sigma=\frac{b}{\beta^{x+2}}$. Ainsi, en nommant β_1 & β_2 les deux valeurs de β, & on aura les deux équations

$$[C-B-C\beta_1]\sigma-[C\beta_1+B-2C]\Delta\sigma=\frac{b_1}{\beta_1^{x+2}};$$

$$[C-B-C\beta_2]\sigma-[C\beta_2+B-2C]\Delta\sigma=\frac{b_2}{\beta_2^{x+2}};$$

qui donneront par l'élimination de $\Delta\sigma$, cette valeur complette de σ,

$$\sigma=\frac{b_1[C\beta_2+B-2C]}{C^2(\beta_1-\beta_2)\beta_1^{x+2}}-\frac{b_2[C\beta_1+B-2C]}{C^2(\beta_1-\beta_2)\beta_2^{x+2}};$$

qui devient, à cause de $B-2C=-C(\beta_1+\beta_2)$,

$$\sigma=-\frac{b_1}{C(\beta_1-\beta_2)\beta_1^{x+1}}+\frac{b_2}{C(\beta_1-\beta_2)\beta_2^{x+1}}.$$

On en tirera deux valeurs particulieres de σ, savoir $\frac{1}{C(\beta_1-\beta_2)\beta_1^{x+1}}$ & $\frac{1}{C(\beta_1-\beta_2)\beta_2^{x+1}}$; en

substituant ces valeurs successivement dans l'équation $K=a$, on aura ces deux intégrales premieres complettes de la proposée

$$([C-A]\mathfrak{C}1-A+B-C)y-(A-B+C+[B-2C]\mathfrak{C}1)\Delta y=\mathfrak{C}^{x+1}1\left[C1+\Sigma\frac{X}{\mathfrak{C}^{x+1}1}\right],$$

$$([C-A]\mathfrak{C}2-A+B-C)y-(A-B+C+[B-2C]\mathfrak{C}2)\Delta y=\mathfrak{C}^{x+1}2\left[C2+\Sigma\frac{X}{\mathfrak{C}^{x+1}2}\right].$$

Avec ces deux intégrales premieres complettes, on trouvera la valeur complette de y, qu'on changera en mettant pour $A-B+C$ & $B-2C$ leurs valeurs $C\mathfrak{C}1\mathfrak{C}2$ & $-C(\mathfrak{C}1+\mathfrak{C}2)$, en la suivante,

$$y=\frac{1}{C(\mathfrak{C}1-\mathfrak{C}2)}\left(\mathfrak{C}^{x}1\left[C1+\Sigma\frac{X}{\mathfrak{C}^{x+1}1}\right]-\mathfrak{C}^{x}2\left[C2+\Sigma\frac{X}{\mathfrak{C}^{x+1}2}\right]\right).$$

Ce résultat est bien conforme à celui que nous avons trouvé d'une autre maniere page 317; j'y ai dit que le cas où les deux valeurs de $\mathfrak{C}$ seroient égales, se résoudroit par la méthode de M. d'Alembert, que j'ai expliquée n°. 41; voici cette solution.

On supposera que les deux valeurs de $\mathfrak{C}$ ne different que d'une quantité infiniment petite ρ; dans cette hypothèse, on aura $y=\frac{-1}{C\rho}\left(\mathfrak{C}^{x}\left[C1+\Sigma\frac{X}{\mathfrak{C}^{x+1}}\right]\right.$ $\left.-(\mathfrak{C}+\rho)^{x}\left[C2+\Sigma\frac{X}{(\mathfrak{C}+\rho)^{x+1}}\right]\right)$; d'où il sera facile de tirer, en développant les fonctions $(\mathfrak{C}+\rho)^{x}$ & $\frac{X}{(\mathfrak{C}+\rho)^{x+1}}$, $y=\frac{x\mathfrak{C}^{x-1}}{C}\left[a1+\Sigma\frac{X}{\mathfrak{C}^{x+1}}\right]$ —

$-\frac{\zeta^x}{C}\left[a2+\Sigma\frac{X(x+1)}{\zeta^{x+2}}\right]$; c'est l'intégrale complette de la proposée lorsque les deux valeurs de ζ sont égales. On parviendra au même résultat, en intégrant complettement l'équation $[C-B-C\zeta]\sigma-[C\zeta+B-2C]\Delta\sigma=\frac{b}{\zeta^{x+2}}$, qui n'est que du premier ordre. En effet, à cause de $B-2C=-2C\zeta$, cette équation deviendra $(\zeta-1)\sigma+\zeta\Delta\sigma=\frac{b}{C\zeta^{x+2}}$. En la comparant à celle du n°. 56, on aura $\sigma=\frac{1}{\zeta^{x+1}}\left[a+\frac{b}{C\zeta}\Sigma 1\right]=\frac{1}{\zeta^{x+1}}\left[a+\frac{b(x+1)}{C\zeta}\right]$; d'où l'on tirera ces deux valeurs particulieres de σ, $\frac{1}{\zeta^{x+1}}$ & $\frac{x+1}{\zeta^{x+2}}$, qui étant substituées successivement dans l'équation $K=a$, donneront pour intégrales premieres complettes de la proposée, ces deux équations,

$$[(C-A)\zeta-A+B-C]y-[A-B+C+(B-2C)\zeta]\Delta y=\zeta^{x+2}\left[a1+\Sigma\frac{X}{\zeta^{x+1}}\right],$$

$$[(C-A)(x+1)\zeta-(A-B+C)(x+2)]y-[(A-B+C)(x+2)+(B-2C)(x+1)\zeta]\Delta y=\zeta^{x+3}\left[a2+\Sigma\frac{X(x+1)}{\zeta^{x+2}}\right].$$

On les changera, en mettant pour $B-2C$, $A-B+C$ & $C-A$ leurs valeurs $-2C\zeta$, $C\zeta^2$ & $-C\zeta(\zeta-2)$; on les changera, dis-je, en celles-ci,

$$-(\zeta-1)y+\Delta y=\frac{\zeta^x}{C}\left[a1+\Sigma\frac{X}{\zeta^{x+1}}\right],$$

$$-[(c-1)x+c]y+x\Delta y=\frac{c^{x+1}}{C}\left[a2+\Sigma\frac{X(x+1)}{c^{x+2}}\right];$$

desquelles on tirera, par l'élimination de Δy, la même valeur complette de y que ci-dessus.

Maintenant soit l'équation aux différences finies de l'ordre n

$$Ay+B\Delta y+C\Delta^2 y+D\Delta^3 y+\&c=X,$$

où A, B, C, D . . . . . . X sont fonctions de la seule variable x & de constantes, & où Δx est pris pour l'unité. L'ayant multipliée par un facteur σ, je l'intégre, ce qui me donne $\Sigma(A\sigma y+B\sigma\Delta y+C\sigma\Delta^2 y+D\sigma\Delta^3 y+\&c)=\Sigma\sigma X+$ constante. Mais

$$\Sigma B\sigma\Delta y=B\sigma y-\Sigma[\Delta.B\sigma.y'],$$

$$\Sigma C\sigma\Delta^2 y=C\sigma\Delta y-\Delta C\sigma.y'+\Sigma[\Delta^2.C\sigma.y''],$$

$$\Sigma D\sigma\Delta^3 y=D\sigma\Delta^2 y-\Delta.D\sigma.\Delta y'+\Delta^2.D\sigma.y''-\Sigma[\Delta^3.D\sigma.y'''],$$

&c; donc l'équation précédente deviendra

$$\begin{aligned}&\Sigma[A\sigma y-\Delta.B\sigma.y'+\Delta^2.C\sigma.y''-\Delta^3 D\sigma.y'''+\&c]\\&+B\sigma y-\Delta.C\sigma.y'+\Delta^2.D\sigma.y''-\&c\\&+C\sigma\Delta y-\Delta.D\sigma.\Delta y'+\&c\\&+D\sigma\Delta^2 y-\&c\\&\&c=\Sigma\sigma X+\text{constante}.\end{aligned}$$

Il n'est pas moins clair que

$$\Sigma A\sigma y=\Sigma[A\sigma]^{n'}y^{n'}-[A\sigma]^{(n-1)'}y^{(n-1)'}-\ldots\ldots-A\sigma y,$$

$$\Sigma\Delta.B\sigma y'=\Sigma[\Delta.B\sigma]^{(n-1)'}y^{n'}-[\Delta.B\sigma]^{(n-2)'}y^{(n-1)'}-\ldots\ldots-\Delta.B\sigma.y',$$

$\Sigma\Delta^2 . C\sigma y'' = \Sigma[\Delta^2 . C\sigma]^{(n-2)'} y^{n'} - [\Delta^2 . C\sigma]^{(n-3)'}$
$y^{(n-1)'} - \ldots\ldots\ldots - \Delta^2 . C\sigma . y''$,

$\Sigma\Delta^3 . D\sigma . y''' = \Sigma[\Delta^3 . D\sigma]^{(n-3)'} y^{n'} - [\Delta^3 . D\sigma]^{(n-4)'}$
$y^{(n-1)'} - \ldots\ldots\ldots - \Delta^3 . D\sigma . y'''$,

&c. Par la substitution de ces valeurs l'équation dont il s'agit sera changée en celle-ci,

$$\begin{aligned}
&\Sigma([A\sigma]^{n'} - \Delta[B\sigma]^{(n-1)'} + \Delta^2[C\sigma]^{(n-2)'} - \\
&\Delta^3[D\sigma]^{(n-3)'} + \&c) y^{n'} + (K) \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (B - A)\sigma y - (\Delta[C\sigma - B\sigma] + A'\sigma') y' + \\
&(\Delta^2[D\sigma - C\sigma] + \Delta . B'\sigma' - A''\sigma'') y'' - \&c \\
&+ C\sigma \Delta y - \Delta . D\sigma . \Delta y' + \&c \\
&+ D\sigma \Delta^2 y - \&c \\
&\&c - \Sigma\sigma X = a,
\end{aligned}$$

a étant la constante arbitraire ajoutée en intégrant. Je ferai

$$[A\sigma]^{n'} - \Delta[B\sigma]^{(n-1)'} + \Delta^2[C\sigma]^{(n-2)'} - \Delta^3[D\sigma]^{(n-3)'} + \&c = 0,$$

& cette équation servira à déterminer le facteur σ; alors $K = a$ sera l'intégrale premiere complette de la proposée. Mais

$$A^{n'}\sigma^{n'} = A^{n'}\left[\sigma + n\Delta\sigma + n . \frac{n-1}{2}\Delta^2\sigma + \&c\right],$$

$$\Delta[B\sigma]^{(n-1)'} = \Delta B^{(n-1)'} . \sigma^{(n-1)'} + B^{n'}\Delta\sigma^{(n-1)'} =$$

$$\Delta B^{(n-1)'}\left[\sigma + (n-1)\Delta\sigma + (n-1)\frac{n-2}{2}\Delta^2\sigma + \&c\right]$$

$$+ B^{n'}\left[\qquad \Delta\sigma + (n-1) \qquad \Delta^2\sigma + \&c\right]$$

$$\Delta^2[C\sigma]^{(n-2)'} = \Delta^2 C^{(n-2)'} . \sigma^{(n-2)'} + 2\Delta C^{(n-1)'} . \Delta\sigma^{(n-2)'} + C^{n'}\Delta^2\sigma^{(n-2)'} =$$

$$\Delta^2 C^{(n-2)'}\left[\sigma + (n-2)\Delta\sigma + (n-2)\frac{n-3}{2}\Delta^2\sigma + \&c\right]$$
$$+ 2\Delta C^{(n-1)'}\left[\Delta\sigma + (n-2)\Delta^2\sigma + \&c\right]$$
$$+ C^{n'}\left[\Delta^2\sigma + \&c\right]$$

$\Delta^3[D\sigma]^{(n-3)'} = \Delta^3 D^{(n-3)'} . \sigma^{(n-3)'} + 3\Delta^2 D^{(n-2)'} .$
$\Delta\sigma^{(n-3)'} + 3\Delta D^{(n-1)'} . \Delta^2\sigma^{(n-3)'} + D^{n'}\Delta^3\sigma^{(n-3)'} =$

$$\Delta^3 D^{(n-3)'}\left[\sigma + (n-3)\Delta\sigma + (n-3)\frac{n-4}{2}\Delta^2\sigma + \&c\right]$$
$$+ 3\Delta^2 D^{(n-2)'}\left[\Delta\sigma + (n-3)\Delta^2\sigma + \&c\right]$$
$$+ 3\Delta D^{(n-1)'}\left[\Delta^2\sigma + \&c\right]$$
$$+ D^{n'}\left[\Delta^3\sigma\right]$$

&c; donc on pourra transformer l'équation qui renferme σ en celle ci, (A) ....

$$A1\sigma + B1\Delta\sigma + C1\Delta^2\sigma + D1\Delta^3\sigma + \&c = 0,$$

dans laquelle

$A1 = A^{n'} - \Delta B^{(n-1)'} + \Delta^2 C^{(n-2)'} - \Delta^3 D^{(n-3)'} + \&c,$
$B1 = nA^{n'} - (n-1)\Delta B^{(n-1)'} - B^{n'} + (n-2)$
$\Delta^2 C^{(n-2)'} + 2\Delta C^{(n-1)'} - (n-3)\Delta^3 D^{(n-3)'} -$
$3\Delta^2 D^{(n-2)'} + \&c,$

$C1 = n\frac{n-1}{2}A^{n'} - (n-1)\frac{n-2}{2}\Delta B^{(n-1)'} -$
$(n-1)B^{n'} + (n-2)\frac{n-3}{2}\Delta^2 C^{(n-2)'} + 2(n-2)$
$\Delta C^{(n-1)'} + C^{n'} - (n-3)\frac{n-4}{2}\Delta^3 D^{(n-3)'} -$
$3(n-3)\Delta^2 D^{(n-2)'} - 3\Delta D^{(n-1)'} + \&c$

$D1 = n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}A^{n'} - (n-1)\frac{n-2}{2}.\frac{n-3}{3}\Delta B^{(n-1)'} - (n-1)\frac{n-2}{2}B^{n'} + (n-2)\frac{n-3}{2}.\frac{n-4}{3}\Delta^2 C^{(n-2)'} + 2(n-2)\frac{n-3}{2}\Delta C^{(n-1)'} + (n-2)C^{n'} - (n-3)\frac{n-4}{2}.\frac{n-5}{3}\Delta^3 D^{(n-3)'} - 3(n-3)\frac{n-4}{2}\Delta^2 D^{(n-2)'} - 3(n-3)\Delta D^{(n-1)'} - D^{n'} + \&c, \&c.$

Je multiplierai cette équation A par un facteur $\psi^{n'}$; & l'ayant intégrée comme j'ai fait la proposée, j'aurai ($K2$)..............................

$(B1 - A1)\psi^{n'}\sigma - (\Delta.[C1 - B1]\psi^{n'} + A'1\psi^{(n+1)'})$
$\sigma' + (\Delta^2.[D1 - C1]\psi^{n'} + \Delta B'1\psi^{(n+1)'} - A''1\psi^{(n+2)'})\sigma'' - \&c$
$+ C1\psi^{n'}\Delta\sigma - \Delta.D1\psi^{n'}.\Delta\sigma' + \&c$
$+ D1\psi^{n'}\Delta^2\sigma - \&c$
$+ \&c = b,$
&c.

b étant la constante arbitraire ajoutée en intégrant. J'aurai aussi pour déterminer $\psi^{n'}$ une équation qui, toute réduction faite, deviendra

$A^{n'}\psi^{n'} + B^{n'}\Delta\psi^{n'} + C^{n'}\Delta^2\psi^{n'} + D^{n'}\Delta^3\psi^{n'} + \&c = 0,$

& donnera par conséquent (B)..............

$A\psi + B\Delta\psi + C\Delta^2\psi + D\Delta^3\psi + \&c = 0.$

Si l'on pouvoit trouver $n-1$ valeurs de ψ qui satisfissent à l'équation précédente, on auroit, au moyen de l'équation $K2 = b$, $n-1$ équations qui renfermeroient σ & ses différences successives jusqu'à celles

de l'ordre $n-1$ inclusivement. Ainsi par l'élimination on arriveroit à une équation du premier ordre, de laquelle il seroit facile de tirer la valeur complette de σ. En faisant dans cette valeur successivement toutes les constantes arbitraires, moins une, égales à zero, on parviendroit à avoir n valeurs particulieres de σ. Ces valeurs étant substituées successivement dans l'équation $K=a$, donneroient les n intégrales premieres complettes de la proposée, avec lesquelles on élimineroit Δy, $\Delta^2 y \ldots\ldots \Delta^{n-1} y$, & on auroit la valeur complette de y. Mais l'équation B n'est autre que la proposée dans laquelle on auroit fait $X=0$; d'où il suit qu'on trouveroit la valeur complette de y dans l'équation linéaire d'un ordre quelconque

$$Ay+B\Delta y+C\Delta^2 y+D\Delta^3 y+\&c=X,$$

si on avoit $n-1$ valeurs de y qui satisfissent à cette équation dans le cas de $X=0$. Ainsi le Théorême de M. de la Grange, démontré n°. 49, s'étend aux différences finies; comme MM. le Marquis de Condorcet & de la Place l'ont remarqué dans les Mémoires cités page 314; & nous sommes arrivés au même résultat, quoique nous ayons suivi chacun des méthodes fort différentes.

Si A, B, C, D, &c sont des quantités constantes, on satisfera à l'équation B, en prenant $\psi=\zeta^x$, & ζ sera donné par l'équation du degré n

$$A+B(\zeta-1)+C(\zeta-1)^2+D(\zeta-1)^3+\&c=0.$$

Lorsque cette équation aura toutes ses racines inégales, le Problême pourra se résoudre par de simples éliminations; & dans le cas où elles auroient des racines égales, on feroit de plus usage de la méthode de M. d'Alembert que nous avons suffisamment expliquée.

92. Maintenant étant donné entre les variables z, y & x les deux équations linéaires du premier ordre

$$Ay+Bz+C\Delta y+D\Delta z=X,$$
$$A1y+B1z+C1\Delta y+D1\Delta z=X1;$$

on propose de trouver les valeurs complettes de y & z, chacune en fonctions de x & de constantes. Après les avoir multipliées, la premiere par un facteur σ, la seconde par un facteur $\sigma 1$, j'intégre, comme j'ai fait dans l'article précédent, & il me vient

$$\Sigma[(A\sigma+A1\sigma 1)y-\Delta(C\sigma+C1\sigma 1).y']+$$
$$\Sigma[(B\sigma+B1\sigma 1)z-\Delta(D\sigma+D1\sigma 1)z']$$
$$+(C\sigma+C1\sigma 1)y+(D\sigma+D1\sigma 1)z=$$
$$\Sigma[X\sigma+X1\sigma 1]+ \text{constante.}$$

Mais il est clair que

$$\Sigma[A\sigma+A1\sigma 1]y=\Sigma(A'\sigma'+A'1\sigma'1)y'-$$
$$(A\sigma+A1\sigma 1)y,$$
$$\Sigma(B\sigma+B1\sigma 1)z=\Sigma(B'\sigma'+B'1\sigma'1)z'-$$
$$(B\sigma+B1\sigma 1)z;$$

ainsi l'équation précédente pourra être changée en celle-ci,

$$\Sigma[A'\sigma'+A'1\sigma'1-\Delta(C\sigma+C1\sigma 1)]y'+$$
$$\Sigma[B'\sigma'+B'1\sigma'1-\Delta(D\sigma+D1\sigma 1)]z'$$
$$+(K)\ldots\ldots[(C-A)\sigma+(C1-A1)\sigma 1]y+$$
$$[(D-B)\sigma+(D1-B1)\sigma 1]z-$$
$$\Sigma(X\sigma+X1\sigma 1)=a,$$

a étant la constante arbitraire ajoutée en intégrant. Je ferai dans cette équation les coefficiens de y' & z' sous le signe Σ chacun égal à zero, & j'aurai pour déterminer σ & $\sigma 1$ les deux équations

$(A'-\Delta C)\sigma+(A'-C')\Delta\sigma+(A'1-\Delta C1)\sigma 1+$
$(A'1-C'1)\Delta\sigma 1=0,$
$(B'-\Delta D)\sigma+(B'-D')\Delta\sigma+(B'1-\Delta D1)\sigma 1+$
$(B'1-D'1)\Delta\sigma 1=0.$

Je multiplie ces équations, l'une par un facteur ψ', l'autre par un facteur $\psi'1$, & en opérant comme je viens de faire sur les proposées, je trouve

$(K2)..[C\psi'+D\psi'1]\sigma+[C1\psi'+D1\psi'1]\sigma 1=b,$

& pour déterminer ψ' & $\psi'1$ les deux équations

$A'\psi'+B'\psi'1+C'\Delta\psi'+D'\Delta\psi'1=0,$
$A'1\psi'+B'1\psi'1+C'1\Delta\psi'+D'1\Delta\psi'1=0,$

desquelles on tire

$A\psi+B\psi 1+C\Delta\psi+D\Delta\psi 1=0,$
$A1\psi+B1\psi 1+C1\Delta\psi+D1\Delta\psi 1=0.$

Celles-ci ne sont autres que les deux proposées dans lesquelles on auroit fait $X=0$ & $X1=0$; tout est donc réduit à trouver dans ce cas une valeur particuliere de chacune des quantités y & z. En effet, on dégageroit alors dans l'équation $K2=b$, celui qu'on voudroit des deux facteurs σ & $\sigma 1$, $\sigma 1$ par exemple, & ayant substitué pour $\sigma 1$ & $\Delta\sigma 1$ leurs valeurs dans l'une des deux équations du premier ordre qui renferment ces facteurs, elle ne contiendroit plus que σ, $\Delta\sigma$ & x; on l'intégreroit complettement, & on auroit la valeur de σ avec deux constantes arbitraires, d'où l'on tireroit deux valeurs particulieres de ce facteur, & par conséquent aussi deux valeurs particulieres de l'autre facteur $\sigma 1$; on auroit donc, au moyen de l'équation $K=a$, deux équations entre y & z; qui pouvant renfermer chacune une constante arbitraire différente, donneroient les valeurs complettes de ces quantités.

Soient entre les mêmes variables z, y & x les deux équations linéaires du second ordre

$$Ay + Bz + C\Delta y + D\Delta z + E\Delta^2 y + F\Delta^2 z = X,$$
$$A1y + B1z + C1\Delta y + D1\Delta z + E1\Delta^2 y + F1\Delta^2 z = X1;$$

on demande de trouver les valeurs complettes de y & z chacune en fonctions de x & de constantes. Pour cela, il faut les multiplier, l'une par le facteur σ, l'autre par $\sigma 1$; puis les ajouter ensemble, & ensuite intégrer comme nous venons de faire, ce qui donnera

$$\Sigma[(A\sigma + A1\sigma 1)y + (B\sigma + B1\sigma 1)z + (C\sigma + C1\sigma 1)\Delta y + (D\sigma + D1\sigma 1)\Delta z + (E\sigma + E1\sigma 1)\Delta^2 y + (F\sigma + F1\sigma 1)\Delta^2 z] = \Sigma(X\sigma + X1\sigma 1) + \text{constante}.$$

Mais on a

$$\Sigma(A\sigma + A1\sigma 1)y = \Sigma(A''\sigma'' + A''1\sigma''1)y'' - (A'\sigma' + A'1\sigma'1)y' - (A\sigma + A1\sigma 1)y,$$
$$\Sigma(B\sigma + B1\sigma 1)z = \Sigma(B''\sigma'' + B''1\sigma''1)z'' - (B'\sigma' + B'1\sigma'1)z' - (B\sigma + B1\sigma 1)z,$$
$$\Sigma(C\sigma + C1\sigma 1)\Delta y = (C\sigma + C1\sigma 1)y + \Delta(C\sigma + C1\sigma 1).y' - \Sigma\Delta(C'\sigma' + C'1\sigma'1)y'',$$
$$\Sigma(D\sigma + D1\sigma 1)\Delta z = (D\sigma + D1\sigma 1)z + \Delta(D\sigma + D\sigma 1).z' - \Sigma\Delta(D'\sigma' + D'1\sigma'1)z'',$$
$$\Sigma(E\sigma + E1\sigma 1)\Delta^2 y = (E\sigma + E1\sigma 1)\Delta y - \Delta(E\sigma + E1\sigma 1).y' + \Sigma\Delta^2(E\sigma + E1\sigma 1)y'',$$
$$\Sigma(F\sigma + F1\sigma 1)\Delta^2 z = (F\sigma + F1\sigma 1)\Delta z - \Delta(F\sigma + F1\sigma 1).z' + \Sigma\Delta^2(F\sigma + F1\sigma 1)z'';$$

en faisant ces substitutions, on changera l'équation précédente en celle-ci,

$$\Sigma[A''\sigma''+A''1\sigma''1-\Delta(C'\sigma'+C'1\sigma'1)+\Delta^2(E\sigma+E1\sigma1)]y''+$$
$$\Sigma[B''\sigma''+B''1\sigma''1-\Delta(D'\sigma'+D'1\sigma'1)+\Delta^2(F\sigma+F1\sigma1)]z''$$
$$+(K)\ldots\ldots[(C-A)\sigma+(C1-A1)\sigma1]y+[(D-B)\sigma+(D1-B1)\sigma1]z+(E\sigma+E1\sigma1)\Delta y+(F\sigma+F1\sigma1)\Delta z+[\Delta.(C-E)\sigma-A'\sigma'+\Delta.(C1-E1)\sigma1-A'1\sigma'1]y'+[\Delta.(D-F)\sigma-B'\sigma'+\Delta.(D1-F1)\sigma1-B'1\sigma'1]z'-\Sigma(X\sigma+X1\sigma1)=a,$$

a étant la constante arbitraire ajoutée en intégrant. On fera dans cette équation les coefficiens de y'' & z'' chacun égal à zero, & on aura pour déterminer σ & $\sigma1$ les deux équations

$$\left.\begin{array}{l}(A''-\Delta C'+\Delta^2 E)\sigma+(2A''-\Delta C'-C''+2\Delta E')\Delta\sigma+(A''-C''+E'']\Delta^2\sigma\\(A''1-\Delta C'1+\Delta^2 E1)\sigma1+(2A''1-\Delta C'1-C''+2\Delta E'1)\Delta\sigma1+(A''1-C''1+E''1)\Delta^2\sigma1\end{array}\right\}=0.$$

$$\left.\begin{array}{l}(B''-\Delta D'+\Delta^2 F)\sigma+(2B''-\Delta D'-D''+2\Delta F')\Delta\sigma+(B''-D''+F'')\Delta^2\sigma\\(B''1-\Delta D'1+\Delta^2 F1)\sigma1+(2B''1-\Delta D'1-D''1+2\Delta F'1)\Delta\sigma1+(B''1-D''1+F''1)\Delta^2\sigma1\end{array}\right\}=0,$$

On opérera sur celle-ci comme sur les proposées, après les avoir multipliées, la premiere par ψ'', la seconde par $\psi''1$; & on trouvera premierement

cette équation $(K2)$..................

$[(A''-C''+2\Delta E'-\Delta^2 E)\Psi''+(B''-D''+2\Delta F' -\Delta^2 F)\Psi''1)\sigma+$

$[(A''1-C''1+2\Delta E'1-\Delta^2 E1)\Psi''+(B1''-D''1 +2\Delta F'1-\Delta^2 F1)\Psi''1]\sigma 1+$

$[(A''-C''+E'')\Psi''+(B''-D''+F'')\Psi''1]\Delta\sigma+$

$[(A''1-C''1+E''1)\Psi''+(B''1-D''1+F''1) \Psi''1]\Delta\sigma 1+$

$[\Delta.(A''-\Delta C'+2\Delta E'-E'')\Psi''-(A'''-\Delta C''+ \Delta^2 E')\Psi'''+$

$\Delta.(B''-\Delta D'+2\Delta F'-F'')\Psi''1-(B'''-\Delta D''+ \Delta^2 F')\Psi'''1]\sigma'+$

$[\Delta.(A''1-\Delta C'1+2\Delta E'1-E''1)\Psi''-(A'''1- \Delta C''1+\Delta^2 E'1)\Psi'''+$

$\Delta.(B'1-\Delta D'1+2\Delta F'1-F''1)\Psi''1-(B'''1- \Delta D''1+\Delta^2 F'1)\Psi'''1]\sigma'1$

$=b$, b étant la conſtante arbitraire ajoutée en intégrant ; puis ces deux autres,

$A''\Psi''+B\Psi''1+C''\Delta\Psi''+D''\Delta\Psi''1+E''\Delta^2\Psi''+ F''\Delta^2\Psi''1=0,$

$A''1\Psi''+B''1\Psi''1+C''1\Delta\Psi''+D''1\Delta\Psi''1+ E''1\Delta^2\Psi''+F''1\Delta^2\Psi''1=0.$

Mais on tire de celles-ci,

$A\Psi+B\Psi 1+C\Delta\Psi+D\Delta\Psi 1+E\Delta^2\Psi+ F\Delta^2\Psi 1=0,$

$A1\Psi+B1\Psi 1+C1\Delta\Psi+D1\Delta\Psi 1+E1\Delta^2\Psi+ F1\Delta^2\Psi 1=0,$

qui ne sont autres que les deux proposées dans lesquelles on auroit fait $X = 0$ & $X 1 = 0$; donc tout est réduit à trouver dans ce cas deux valeurs particulieres de chacune des quantités y & z. Les deux Problêmes que nous venons de résoudre, suffisent pour faire voir comment il faudra s'y prendre dans des cas plus compliqués; on trouvera constamment que les Théorêmes pour les équations différentielles, que nous avons démontrés n°. 50, ont également lieu lorsque les équations sont aux différences finies.

93. Nous allons nous occuper dans cet article des équations aux différences finies & partielles. Si nous nous servons de $Z^{y,x}$ pour désigner une fonction de y & x; & de $Z^{y,x+1}$, $Z^{y,x+2}$, &c, pour marquer ce que devient cette fonction dans différens instans consécutifs, en supposant qu'à chacun de ces instans x augmente d'une unité; de $Z^{y+1,x}$, $Z^{y+2,x}$, &c, pour marquer ce que devient la même fonction dans différens instans consécutifs, en supposant qu'à chacun de ces instans y augmente d'une unité: il nous sera facile de voir que $Z^{y,x+1} - Z^{y,x}$ est la différence de $Z^{y,x}$ prise en regardant x seul comme variable, que $Z^{y+1,x} - Z^{y,x}$ est la différence de la même fonction prise en regardant y seul comme variable, &c; & par conséquent que $Z^{y,x+1} - Z^{y,x}$, $Z^{y+1,x} - Z^{y,x}$, &c, sont des différences finies & partielles de $Z^{y,x}$. De même que toute équation aux différences finies ordinaires (n°. 56) pourra être représentée par une équation entre x, y, y', y'', &c; toute équation aux différences finies & partielles, dans laquelle l'indéterminée ne sera fonction que de deux variables, ayant chacune l'unité pour différence, pourra être représentée par une équation entre x, y, $Z^{y,x}$, $Z^{y,x+1}$, $Z^{y,x+2}$, &c, $Z^{y+1,x}$, $Z^{y+2,x}$, &c, $Z^{y+1,x+1}$, $Z^{y+2,x+1}$, &c, $Z^{y+1,x+1}$,

$Z^{y+1,x+1}$, &c, &c. On trouvera tous les termes y, y', y'', &c, de la ſuite dont $y^{x'}$ eſt le terme général, en mettant dans ce terme général pour x ſucceſſivement 1, 2, 3, &c; on trouvera de même toutes les ſuites dont $Z^{y,x}$ eſt le terme général, en mettant d'abord dans ce terme général pour y ſucceſſivement 1, 2, 3, &c, ce qui donnera $Z^{1,x}$, $Z^{2,x}$, &c; & mettant enſuite dans chacune de ces fonctions pour x ſucceſſivement 1, 2, 3, &c. On conſtruira de cette maniere la Table que voici qui renferme toutes les ſuites dont $Z^{y,x}$ eſt le terme général.

$$A\begin{cases} Z^{1,1},\ Z^{1,2},\ Z^{1,3},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Z^{1,x} \\ Z^{2,1},\ Z^{2,2},\ Z^{2,3},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Z^{2,x} \\ Z^{3,1},\ Z^{3,2},\ Z^{3,3},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Z^{3,x} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z^{y,1},\ Z^{y,2},\ Z^{y,3},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Z^{y,x} \end{cases}$$

Une ſérie y, y', y'', &c, eſt récurrente ſi un terme quelconque eſt égal à un certain nombre de termes précédens multipliés chacun par une fonction de x; lorſqu'un terme quelconque des ſuites A ſera égal à un certain nombre de termes précédens multipliés chacun par une fonction de x & y, on les nommera *récurro-récurrentes*. Ce nom leur a été donné par M. de la Place, comme on peut le voir dans le Mémoire cité pag. 314, & dans celui qui ſe trouve dans le tome VII des Mémoires préſentés à l'Académie par divers Savans; c'eſt de ce dernier Mémoire que nous tirerons les choſes principales que cet article & le ſuivant renferment.

Pour donner un exemple de ſuites récurro-récurrentes, ſoit

$$Z^{y,x} = 2^{y-1} \cdot \frac{(y-1)(y-2)\ldots\ldots(y-x+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x-1)};$$

en ſuppoſant x ſucceſſivement égal à 1, 2, 3, &c, on aura cette ſuite de fonctions 2^{y-1}, $2^{y-1}.\frac{y-1}{1}$, $2^{y-1}.\frac{y-1}{1}.\frac{y-2}{2}$, $2^{y-1}.\frac{y-1}{1}.\frac{y-2}{2}.\frac{y-3}{3}$, &c; en faiſant enſuite dans chacune y ſucceſſivement égal à 1, 2, 3, &c, on formera la Table ſuivante

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7 . . . . y
1	1,	2,	4,	8,	16,	32,	64, &c
2	0,	2,	8,	24,	64,	160,	384, &c
3	0,	0,	4,	24,	96,	320,	960, &c
4	0,	0,	0,	8,	64,	320,	1280, &c
5	0,	0,	0,	0,	16,	160,	960, &c
6	0,	0,	0,	0,	0,	32,	384, &c
7	0,	0,	0,	0,	0,	0,	64, &c
.							
.							
x							

Ces ſuites ſont récurro-récurrentes, car un terme quelconque eſt égal au double du terme qui précéde dans la direction des x, plus au double du terme qui précéde celui-ci dans la direction des y. Par exemple, $960 = 2.160 + 2.320$, $320 = 2.64 + 2.96$, &c. L'équation aux différences finies & partielles, dont la fonction indéterminée eſt le terme général de ces ſuites, ſera donc $Z^{y,x} = 2Z^{y-1,x} + 2Z^{y-1,x-1}$;

on aura en même-tems cette équation aux différences finies ordinaires $Z^{1,y} = 2Z^{y-1,1}$. L'équation aux différences finies & partielles ne commence à avoir lieu que lorſque y & x ſont chacun plus grand que 1 ; ainſi dans cette équation, $Z^{1,x}$ ou $Z^{y,1}$ eſt arbitraire ; je dis l'une ou l'autre, car $Z^{y,1}$, par exemple, étant déterminé, au moyen de la propoſée on pourra connoître $Z^{y,2}$, $Z^{y,3}$, &c. On a ſans doute remarqué que dans cet exemple, l'arbitraire eſt déterminée par une équation aux différences finies ordinaires, ce qui arrive le plus ſouvent dans les applications du calcul dont il s'agit.

Maintenant l'équation aux différences finies & partielles du premier ordre $Z^{y,x} = A^x Z^{y,x-1} + B^x Z^{y-1,x} + C^x$, dans laquelle A^x, B^x, C^x déſignent différentes fonctions de x ſeul & de conſtantes, étant propoſée; on demande d'en trouver l'intégrale complette. Cette équation ne commence à avoir lieu que lorſque y & x ſont l'un & l'autre plus grands que 1 ; ainſi l'une de ces deux fonctions $Z^{1,x}$ ou $Z^{y,1}$ ſera arbitraire. Je ſuppoſe $Z^{y,1} = \phi:(y)$, & la propoſée donnera

$$(1) \ldots\ldots Z^{y,2} = A^2\phi:(y) + B^2 Z^{y-1,2} + C^2,$$
$$(2) \ldots\ldots Z^{y,3} = A^3 Z^{y,2} + B^3 Z^{y-1,3} + C^3;$$

A^2, B^2, C^2 & A^3, B^3, C^3 déſignant ce que deviennent les fonctions A^x, B^x, C^x, lorſqu'on fait x ſucceſſivement égal à 2 & 3. Mais l'équation 2 donne

$$Z^{y-1,3} = A^3 Z^{y-1,2} + B^3 Z^{y-2,3} + C^3,$$

de laquelle on tirera la valeur de $Z^{y-1,2}$, & l'ayant ſubſtituée dans l'équation 1, on aura $Z^{y,2} = A^2\phi:(y) + C^2 + \frac{B^2}{A^3}(Z^{y-1,3} - B^3 Z^{y-2,3} - C^3)$.

En mettant cette valeur de $Z^{y,2}$ dans l'équation 2, on la changera en celle-ci,

$(a1) \ldots Z^{y,3} - (B^2 + B^3) Z^{y-1,3} + B^2 B^3 Z^{y-2,3} =$
$(K1) \ldots\ldots A^3 (A^2 \phi : (y) + C^2) + C^3 (1 - B^2)$.

La propoſée donne auſſi

$(3) \ldots\ldots Z^{y,4} = A^4 Z^{y,3} + B^4 Z^{y-1,4} + C^4$;

& par conſéquent

$$Z^{y-1,4} = A^4 Z^{y-1,3} + B^4 Z^{y-2,4} + C^4,$$
$$Z^{y-2,4} = A^4 Z^{y-2,3} + B^4 Z^{y-3,4} + C^4.$$

Donc ſi l'on met dans l'équation $a\,1$ pour $Z^{y-1,3}$, $Z^{y-2,3}$ leurs valeurs tirées des deux précédentes, on aura une valeur de $Z^{y,3}$ qui étant ſubſtituée dans l'équation 3 la changera en la ſuivante,

$(a2) \ldots\ldots\ldots Z^{y,4} - (B^2 + B^3 + B^4) Z^{y-1,4} +$
$[B^4 (B^2 + B^3) + B^2 B^3] Z^{y-2,4} - B^2 B^3 B^4 Z^{y-3,4} =$
$(K2) \ldots\ldots\ldots A^4 K1 + C^4 (1 - B^2 - B^3 + B^2 B^3)$.

Je continuerai de faire uſage de la propoſée pour en tirer

$(4) \ldots\ldots Z^{y,5} = A^5 Z^{y,4} + B^5 Z^{y-1,5} + C^5$;

puis $Z^{y-1,5} = A^5 Z^{y-1,4} + B^5 Z^{y-2,5} + C^5$,
$Z^{y-2,5} = A^5 Z^{y-2,4} + B^5 Z^{y-3,5} + C^5$,
$Z^{y-3,5} = A^5 Z^{y-3,4} + B^5 Z^{y-4,5} + C^5$.

Ces trois dernieres équations me donneront les valeurs de $Z^{y-1,4}$, $Z^{y-2,4}$, $Z^{y-3,4}$; je mettrai ces valeurs dans l'équation $a\,2$, & la valeur de $Z^{y,4}$, que j'aurai de cette maniere, étant ſubſtituée dans l'équation 4, la changera en celle-ci,

$(a3) \ldots\ldots Z^{y,5} - (B^2 + B^3 + B^4 + B^5) Z^{y-1,5} +$
$[B^5 (B^2 + B^3 + B^4) + B^4 (B^2 + B^3) + B^2 B^3] Z^{y-2,5}$
$- [B^5 (B^4 [B^2 + B^3] + B^2 B^3) + B^2 B^3 B^4] Z^{y-3,5} +$
$B^2 B^3 B^4 B^5 Z^{y-4,5} = (K3) \ldots\ldots\ldots\ldots A^5 K2 +$
$C^5 [1 -$

$C^r[1 - B^2 - B^3 - B^4 + B^2 B^3 + B^4(B^2 + B^3) - B^2 B^3 B^4]$.

Enfin on doit voir, ſans qu'il ſoit néceſſaire de pouſſer plus loin ces opérations, que le Problême pourra toujours ſe réduire à l'intégration d'une équation de cette forme (A). . . . .

$$Z^{y,x} - M^x Z^{y-1,x} + N^x Z^{y-2,x} - P^x Z^{y-3,x} + \&c = V^{y,x},$$

dans laquelle les fonctions M^x, N^x, P^x, &c, $V^{y,x}$ ſeront faciles à déterminer par analogie. Si on les veut d'une autre maniere, on remarquera qu'elles ſont telles qu'on a cette ſuite d'équations du premier ordre aux différences ordinaires,

$$M^x = M^{x-1} + B^x,$$
$$N^x = N^{x-1} + B^x M^{x-1},$$
$$P^x = P^{x-1} + B^x N^{x-1},$$
&c,
$$V^{y,x} = A^x V^{y,x-1} + C^x(1 - M^{x-1} + N^{x-1} - P^{x-1} + \&c).$$

On traitera l'équation A comme étant aux différences ordinaires, & on aura la valeur de $Z^{y,x}$ avec des arbitraires qui pourront renfermer x. Mais il ne doit y avoir dans l'intégrale demandée de fonction arbitraire que $\varphi:(y)$; il faudra donc déterminer les autres, ce qu'on fera aiſément en ſubſtituant dans la propoſée la valeur trouvée de $Z^{y,x}$, & en comparant les termes homologues par rapport à x.

Si l'on propoſoit l'équation

$$Z^{y,x} = A^x 1 Z^{y,x-1} + A^x 2 Z^{y-1,x-1} + A^x 3 Z^{y-2,x-1} + \&c$$

$$+B^x 1 Z^{y-1,x} + B^x 2 Z^{y-2,x} + B^x 3 Z^{y-3,x} + \&c + C^x;$$

comme cette équation eſt du premier ordre par rapport à x, on l'intégreroit par les mêmes procédés que la précédente; c'eſt à-dire qu'en faiſant $Z^{y,1} = \varphi:(y)$, on parviendroit à une équation de cette forme,

$$Z^{y,x} + M^x Z^{y-1,x} + N^x Z^{y-2,x} + P^x Z^{y-3,x} + \&c = V^{y,x},$$

où les fonctions M^x, N^x, $P^x \ldots\ldots V^{y,x}$ ſeroient données par les équations ſuivantes,

$$M^x = M^{x-1} - B^x 1,$$
$$N^x = N^{x-1} - B^x 1 M^{x-1} - B^x 2;$$
$$P^x = P^{x-1} - B^x 1 N^{x-1} - B^x 2 M^{x-1} - B^x 3;$$
&c
$$V^{y,x} = V^{y,x-1} [A^x 1 + A^x 2 + A^x 3 + \&c]$$
$$+ C^x [1 + M^{x-1} + N^{x-1} + P^{x-1} + \&c].$$

Je prendrai pour exemple l'équation aux ſuites récurro-récurrentes dont nous avons parlé plus haut, & que l'on fait être $Z^{y,x} = 2Z^{y-1,x} + 2Z^{y+1,x-1}$; on a dans ce cas

$$M^x = M^{x-1} - 2;$$
$$N^x = N^{x-1} - 2M^{x-1};$$
$$P^x = P^{x-1} - 2N^{x-1},$$
&c; $V^{y,x} = 2V^{y,x-1}$.

Mais (n°. 56) on tire de la premiere de ces équations

$$M^{x-1} = c - 2\Sigma 1 = c - 2.(x-1) = -2.(x-1),$$

puiſque M^{x-1} doit être nul dans l'hypothèſe de $x=1$; donc $M^x = -2x$. Alors la ſeconde équation devient $N^x = N^{x-1} + 4.(x-1)$, & donne

$N^{x-1} = c + 4\Sigma(x-1) = c + 4\left(\frac{x^2-x}{2} - x + 1\right) = 4\left(\frac{x^2-x}{2} - x + 1\right)$, car $x=1$ doit rendre $N^{x-1}=0$; donc $N^x = 2^2 . x . \frac{x-1}{2}$. La troisiéme équation devient $P^x = P^{x-1} - 2^3 . \frac{x^2-3x+2}{2}$, & donne $P^{x-1} = c - 2^2\Sigma(x^2-3x+2) = c - 2^2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} - 3\frac{x^2-x}{2} + 2 . (x-1)\right) = -2^2\left(\frac{x^2.(x-1)}{6} + \frac{x.(x-1)^2}{6} - 3x\frac{x-1}{2} + 2.(x-1)\right)$; donc $P^x = -2^3\, x . \frac{x-1}{2} . \frac{x-2}{3}$, &c. Quant à l'équation $V^{y,x} = 2V^{y,x-1}$, on en tire $V^{y,x-1} = c2^{x-1}$; mais cette fonction, comme les précédentes, doit être nulle lorsque $x=1$; donc $V^{y,x}$ est nécessairement nul dans cet exemple. Cela posé, l'équation qu'il s'agira d'intégrer pour résoudre le Problême, sera

$$Z^{y,x} - 2xZ^{y-1,x} + 2^2 . x . \frac{x-1}{2} Z^{y-2,x} - 2^3 . x . \frac{x-1}{2} . \frac{x-2}{3} Z^{y-3,x} + \&c = 0;$$

voici un moyen simple d'y parvenir. On verra aisément qu'on peut satisfaire à cette équation, en prenant $Z^{y,x} = \lambda^{y-1}$, où λ est telle que $1 - \frac{2x}{\lambda} + \frac{2^2}{\lambda^2} x . \frac{x-1}{2} - \frac{2^3}{\lambda^3} x . \frac{x-1}{2} . \frac{x-2}{3} + \&c = 0$;

celle-ci devient $\left(1-\frac{2}{\lambda}\right)^x=0$, & ne donne par conféquent qu'une valeur de λ, favoir $\lambda=2$. Cela pofé, on fera $Z^{y,x}=\Pi^{y,x}2^{y-1}$, & en fubftituant toujours dans la même équation, on la changera en celle-ci,

$$\Pi^{y,x}-x\,\Pi^{y-1,x}+x.\frac{x-1}{2}\Pi^{y-2,x}-x.\frac{x-1}{2}.$$
$$\frac{x-2}{3}\Pi^{y-3,x}+\&c=0,$$

qui n'eft autre que $\Delta^x\Pi^{y,x}=0$, & donne $\Pi^{y,x}=$

$$c1\,\frac{(y-1)(y-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(y-x+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x-1)}+$$
$$c2\,\frac{(y-1)(y-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(y-x+2)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x-2)}+$$
$$c3\,\frac{(y-1)(y-2)\ldots\ldots(y-x+3)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(x-3)}+\&c;$$

il refte à déterminer $c1$, $c2$, $c3$. Pour cela, je mets dans l'équation $Z^{y,x}=2Z^{y-1,x}+2Z^{y-1,x-1}$, pour $Z^{y,x}$ fa valeur; &, à caufe de

$$\frac{(y-1)(y-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(y-x+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x-1)}=$$
$$\frac{(y-2)(y-3)\ldots\ldots\ldots\ldots(y-x)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x-1)}+$$
$$\frac{(y-2)(y-3)\ldots\ldots(y-x+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(x-2)},$$
$$\frac{(y-1)(y-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(y-x+2)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x-2)}=$$
$$\frac{(y-2)(y-3)\ldots\ldots\ldots\ldots(y-x+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x-2)}+$$

$$\frac{(y-2)(y-3)\ldots\ldots\ldots\ldots(y-x+2)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x-3)};$$

&c, il me vient

$$c1\,\frac{(y-2)(y-3)\ldots\ldots\ldots(y-x)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(x-1)}+(c1+c2)\,\frac{(y-2)(y-3)\ldots\ldots\ldots\ldots(y-x+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x-2)}+$$

$$(c2+c3)\,\frac{(y-2)(y-3)\ldots\ldots\ldots\ldots(y-x+2)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x-3)}$$

$$+\,\&c = c1\,\frac{(y-2)(y-3)\ldots\ldots\ldots\ldots(y-x)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(x-1)}+$$

$$(c2+'c1)\,\frac{(y-2)(y-3)\ldots\ldots\ldots(y-x+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(x-2)}+$$

$$(c3+'c2)\,\frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x+2)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(x-3)}+\&c.$$

Cette équation ne peut être identique à moins que

$$c1='c1,\ c2='c2,\ c3='c3,\ \&c;$$

d'où il suit que $c1$, $c2$, $c3$, &c, doivent être des quantités constantes. Ainsi lorsque x sera $=1$, on aura $\Pi^{y,x}=c1$, $c1$ étant une quantité constante, & $Z^{y,1}=c1\,2^{y-1}$; mais par la nature de nos suites récurro-récurrentes, $Z^{1,1}=1$, donc $c1=1$. Lorsque x sera $=2$, on aura $\Pi^{y,x}=\frac{y-1}{1}+c2$ & $Z^{y,2}=2^{y-1}(y-1+c2)$; mais par la formation de nos suites, $Z^{1,2}=0$, donc $c2=0$. On trouvera de la même maniere $c3$ & les autres coefficiens nuls; & par conséquent que ces suites ont pour terme général $2^{y-1}\,\frac{(y-1)(y-2)\ldots\ldots(y-x+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(x-1)}$.

Soit proposé l'équation du second ordre

$Z^{y,x} = A^x 1\, Z^{y,x-1} + A^x 2\, Z^{y,x-2} + B^x 1\, Z^{y-1,x} + B^x 2\, Z^{y-1,x-1} + C^x Z^{y-2,x} + D^x$.

Cette équation ne commence à avoir lieu que lorsque y & x sont l'un & l'autre plus grands que 2 ; ainsi $Z^{y,1}$ & $Z^{y,2}$ resteront nécessairement arbitraires. Je ferai comme dans le Problême précédent $Z^{y,1} = \phi:(y)$, $Z^{y,2} = f:(y)$; & la proposée donnera

(1). . . . . . . $Z^{y,3} = A^3 1 f:(y) + A^3 2 \phi:(y) + B^3 1\, Z^{y-1,3} + B^3 2 f:(y-1) + C^3 Z^{y-2,3} + D^3$,

(2). . . . . . . $Z^{y,4} = A^4 1\, Z^{y,3} + A^4 2 f:(y) + B^4 1\, Z^{y-1,4} + B^4 2\, Z^{y-1,3} + C^4 Z^{y-2,4} + D^4$.

On tirera de l'équation 2, $Z^{y-1,4} = A^4 1\, Z^{y-1,3} + A^4 2 f:(y-1) + B^4 1\, Z^{y-2,4} + B^4 2\, Z^{y-2,3} + C^4 Z^{y-3,4} + D^4$, & par conséquent $Z^{y-2,3} = \frac{1}{B^4 2}(Z^{y-1,4} - A^4 1\, Z^{y-1,3} - A^4 2 f:(y-1) - B^4 1\, Z^{y-2,4} - C^4 Z^{y-3,4} - D^4)$. En substituant cette valeur dans l'équation 1, il viendra $Z^{y,3} = A^3 1 f:(y) + A^3 2 \phi:(y) + \left(B^3 1 - \frac{C^3 A^4 1}{B^4 2}\right) Z^{y-1,3} + B^3 2 f:(y-1) + D^3 + \frac{C^3}{B^4 2}\left(Z^{y-1,4} - A^4 2 f:(y-1) - B^4 1\, Z^{y-2,4} - C^4 Z^{y-3,4} - D^4\right)$. Celle-ci donnera $Z^{y-1,3} = A^3 1 f:(y-1) + A^3 2 \phi:(y-1) + \frac{B^3 1 B^4 2 - C^3 A^4 1}{(B^4 2)^2}(Z^{y-1,4} - A^4 1\, Z^{y-1,3} - A^4 2 f:(y-1) - B^4 1\, Z^{y-2,4} - C^4 Z^{y-3,4} - D^4) + B^3 2 f:(y-2) + D^3 + \frac{C^3}{B^4 2}(Z^{y-2,4} - A^4 2 f:(y-2) - B^4 1\, Z^{y-3,4} - C^4 Z^{y-4,4} - D^4)$. Ainsi on pourra chasser $Z^{y,3}$,

$Z^{y-1,x}$ de l'équation 2 ; par une suite de procédés semblables, on réduira le Problême à l'intégration d'une équation de cette forme

$$Z^{y,x} + M^x Z^{y-1,x} + N^x Z^{y-2,x} + P^x Z^{y-3,x} + \&c = V^{y,x},$$

ce qu'on fera par la méthode du n°. 91.

94. Il nous reste à faire voir, par différentes applications, l'usage dont peut être dans l'analyse, le Calcul Intégral aux différences finies; & d'abord nous résoudrons un Problême où il est question de déterminer l'expression générale de quantités assujetties à une certaine loi qui sert à les former.

Soit x le sinus d'un angle, z & y son cosinus; on pourra former, au moyen de l'équation

$$(\alpha) \ldots \text{sin.}\, nz = 2y\, \text{sin.}\,(n-1)z - \text{sin.}\,(n-2)z,$$

la table suivante,

$$\text{sin.}\, z = x,$$
$$\text{sin.}\, 2z = x(2y);$$
$$\text{sin.}\, 3z = x(4y^2 - 1);$$
$$\text{sin.}\, 4z = x(8y^3 - 4y),$$
$$\text{sin.}\, 5z = x(16y^4 - 12y^2 + 1),$$

&c. En continuant plus loin cette table, on parviendroit, par voie d'induction, à déterminer l'expression générale de sin. nz; mais il est question de trouver cette expression directement. On verra aisément qu'on peut supposer

$$\text{sin.}\, nz = x[Ay^{n-1} + By^{n-3} + Cy^{n-5} + Dy^{n-7} + \&c];$$

& par conséquent

fin. $(n-1)z = x['Ay^{n-2} + 'By^{n-4} + 'cy^{n-6} + 'Dy^{n-8} + \&c]$,

fin. $(n-2)z = x[''Ay^{n-3} + ''By^{n-5} + ''cy^{n-7} + ''Dy^{n-9} + \&c]$.

En mettant ces valeurs de fin. $(n-1)z$, fin. $(n-2)z$ dans l'équation α, on en tirera

$$\text{fin. } nz = 2x['Ay^{n-1} + 'By^{n-3} + 'cy^{n-5} + 'Dy^{n-7} + \&c] - x[''Ay^{n-3} + ''By^{n-5} + ''cy^{n-7} + \&c];$$

expreffion qui étant comparée à la premiere, donnera cette fuite d'équations

$2'A = A$,

$2'B - ''A = B$,

$2'c - ''B = c$,

$2'D - ''c = D$,

&c,

qui ne font autres que

$2A - A' = 0$,

$2B - B' = 'A$,

$2c - c' = 'B$,

$2D - D' = 'c$,

&c.

Si l'on avoit $2K - K' = X$, & que l'on comparât cette équation à celle du n°. 56, on trouveroit, en défignant par x le nombre des termes qui précédent K, pour la valeur complette de K, $K = 2^x\left[c + \Sigma \frac{X}{2^{x+1}}\right]$; nous allons faire ufage de cette formule pour intégrer les équations de la fuite pré-

cédente. Pour la premiere, $x=n-1$ & $X=0$; donc $A=c2^{n-1}$: on déterminera la constante arbitraire c, en remarquant qu'on doit avoir $A=1$ lorsque $n=1$, ce qui donnera $c=1$ & $A=2^{n-1}$. Pour la seconde, $x=n-2$ & $X='A=2^{n-2}$; donc $B=2^{n-2}[c-\frac{1}{2}\Sigma 1]=2^{n-2}\left(c-\frac{n-2}{2}\right)$: on déterminera la constante arbitraire, en remarquant que la supposition de $n=2$ doit donner $B=0$, & on aura $B=-2^{n-3}(n-2)$. Pour la troisiéme, $x=n-3$ & $X='B=-2^{n-4}(n-3)$; donc $C=2^{n-3}[c+\frac{1}{4}\Sigma(n-3)]$; or $\Sigma(n-3)=\Sigma n-3\Sigma 1=\frac{n^2-n}{2}-3(n-3)=\frac{(n-3)(n-4)}{2}+3$, donc $C=2^{n-3}\left(c+\frac{3}{4}+\frac{(n-3)(n-4)}{8}\right)$: on déterminera la constante arbitraire, en remarquant que la supposition de $n=3$ doit donner $C=0$, & on aura $C=2^{n-5}\cdot\frac{(n-3)(n-4)}{2}$. Puisque C ne commence à avoir lieu que lorsque $n=5$, j'aurois pu prendre $n-4$ pour le nombre des termes qui précédent C, & j'aurois trouvé $C=2^{n-4}\left(c+3+\frac{(n-3)(n-4)}{4}\right)$; j'aurois déterminé la constante arbitraire, en remarquant que $n=3$ ou $n=4$ doit donner $C=0$, & j'aurois trouvé la même valeur de C que ci-dessus. Lorsque $n=4$, D n'a point encore lieu; donc, à cause de $X='C=2^{n-6}\cdot\frac{(n-4)(n-5)}{2}$, on a $D=2^{n-4}\left[c-\Sigma\frac{(n-4)(n-5)}{16}\right]$. Mais

$\Sigma(n-4)(n-5) = \Sigma(n^2-9n+20) = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - 9\,\frac{n^2-n}{2} + 20\,(n-4) = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3} - 40$; donc $D = 2^{n-4}\left(c + \frac{5}{2} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3.16}\right)$. On déterminera la conſtante arbitraire, en remarquant que la ſuppoſition de $n=4$ doit donner $D=0$, & on aura $D = -2^{n-7}\,\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2.3}$, &c.

Le Problême qui ſuit eſt d'un autre genre ; mais je crois qu'on en verra avec plaiſir la ſolution par les méthodes précédentes. Un homme a conſtitué une ſomme a en rente, avec cette condition qu'on lui paiera chaque année le $\frac{1}{m}$ de cette ſomme, en lui retenant la fraction $\frac{1}{n}$ de cet intérêt; en ſorte qu'à la fin de la premiere année, par exemple, il ne doive percevoir que $\frac{a}{m} - \frac{a}{mn}$. Cependant on lui a payé toutes les années $\frac{a}{m}$, & par conſéquent plus qu'il ne lui eſt dû; ſi le ſurplus eſt employé à amortir le capital, on demande ce que deviendra ce capital après un nombre x d'années.

Soit alors y ce capital; à la fin de cette année, il ne ſera du à l'homme en queſtion que $\frac{y}{m} - \frac{y}{mn}$, & lorſqu'on lui aura payé $\frac{a}{m}$, le capital ſera dimi-

nué de $\frac{a}{m} - \frac{y}{m} + \frac{y}{mn}$. Ainsi le capital de l'année $x+1$, que je désignerai par y', sera égal à $y - \frac{a}{m} + \frac{y}{m} - \frac{y}{mn}$; & on aura à intégrer l'équation $y' - \left(1 + \frac{1}{m} - \frac{1}{mn}\right)y = -\frac{a}{m}$. En la comparant à celle du n°. 56, on trouvera $y = \left(1 + \frac{1}{m} - \frac{1}{mn}\right)^x \left(c - \frac{a}{m} \Sigma\left[1 + \frac{1}{m} - \frac{1}{mn}\right]^{-x-1}\right)$. Mais $\Sigma\left[1 + \frac{1}{m} - \frac{1}{mn}\right]^{-x-1}$ est la somme de la progression géométrique

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)^x}, \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)^{x-1}} \ldots \frac{1}{1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}},$$

laquelle somme est égale à

$$\frac{\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)^x - 1}{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)^x};$$

donc $y = \left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)^x \left(c - \frac{a}{m} \frac{\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)^x - 1}{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)^x}\right)$. On déterminera la constante arbitraire par cette condition que $x = 1$ doit donner $y = a$, & on aura $c =$

$\frac{(m+1)a}{m\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)}$; donc enfin $y=\frac{a}{n-1}$ $\left(n-\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)^{x-1}\right)$.

Si l'on vouloit l'année à laquelle ce capital seroit nul, on auroit $n=\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)^{x-1}$ & $x= 1+\frac{\log. n}{\log.\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)}$. Par exemple, l'intérêt étant à cinq pour cent, & la somme à retenir un dixiéme de cet intérêt; on trouveroit $x=1+\frac{\log. 10}{\log.(1+\frac{2}{100})}=53,3$.

Maintenant voici deux autres Problêmes tirés du Calcul des probabilités. Pour les résoudre, nous suivrons la regle ordinaire de ce Calcul; en estimant la probabilité d'un événement, par le nombre des cas favorables, divisé par le nombre des cas possibles.

Le premier de ces Problêmes consiste à trouver la probabilité qu'un nombre de piéces, qu'on prendra au hasard dans un tas, sera pair ou impair. Je nomme x le nombre de piéces contenues dans le tas, y la somme des cas dans lesquels le nombre de celle qu'on prendra peut être pair, & z la somme des cas dans lesquels ce nombre peut être impair. Cela posé, si on augmente le nombre x de piéces d'une unité, alors y' représentera la somme des cas pairs, & sera égal à $y+z$, puisque chacun des cas impairs, combiné avec la nouvelle piéce, donnera un cas pair. De même, z' représentera la somme des cas impairs lorsque x augmentera d'une unité, & sera égal à $z+y+1$. On aura donc ces deux équations $y'=y+z$

& $z' = z + y + 1$, qui ne font autres que $\Delta y = z$ & $\Delta z = y + 1$. On en tirera bien facilement $\Delta^2 y = y + 1$, équation qui étant comparée à celle du n°. 91, donnera

$$y + \Delta y = 2^x \left[c + \Sigma \frac{1}{2^x + 1} \right] = 2^x \left[c + \frac{2^x - 1}{2^x} \right],$$

puifque $\Sigma \frac{1}{2^x + 1}$ eft la fomme de tous les termes de cette progreffion géométrique $\frac{1}{2^x}, \frac{1}{2^{x-1}} \ldots \frac{1}{2}$.
Donc $y = (c + 1) 2^{x-1} - 1$; pour déterminer la conftante arbitraire, on obfervera que x étant 1, on doit avoir $y = 0$; donc $c = 0$, & $y = 2^{x-1} - 1$. Mais $z = \Delta y = 2^{x-1}$; donc la fomme de tous les cas poffibles fera $2^x - 1$. Ainfi on aura pour la probabilité qu'on prendra un nombre pair de piéces, $\frac{2^{x-1} - 1}{2^x - 1}$; & pour la probabilité que ce nombre qu'on prendra fera impair, $\frac{2^{x-1}}{2^x - 1}$, d'où il réfultera qu'il y aura toujours plus d'avantage à parier pour les nombres impairs que pour les pairs. Je paffe au fecond Problême.

Pierre & Paul, dont les adreffes refpectives font $:: m:n$, jouant enfemble; fur un nombre y de coups, il en a manqué conftamment un nombre x à Pierre, & par conféquent un nombre $y - x$ à Paul, pour gagner; on demande la probabilité refpective de ces deux Joueurs.

La probabilité de Paul pour gagner dépend du nombre y de coups, & du nombre x qu'il en a manqué à Pierre pour gagner; c'eft-à-dire qu'elle peut être repréfentée par une fonction $Z^{y,x}$ de ces deux nombres. Au coup fuivant le nombre y fera diminué d'une unité; & fi Paul perd, il ne manquera à Pierre

qu'un nombre $x-1$ de coups pour gagner; alors la probabilité de Paul pour gagner sera $Z^{y-1,x-1}$; au contraire, si Paul gagne, cette même probabilité sera $Z^{y-1,x}$. Mais les adresses des deux Joueurs étant $:: m:n$; la probabilité que sur un nombre indéfini de coups, Paul gagnera, est $\frac{n}{m+n}$; la probabilité qu'il perdra est $\frac{m}{m+n}$, on a donc $Z^{y,x} = \frac{n}{m+n} Z^{y-1,x} + \frac{m}{m+n} Z^{y-1,x-1}$, équations aux différences finies & partielles dont l'intégration donnera la solution du Problême. En la comparant à celle de la page 737, on trouvera $A^x 1 = 0$,

$A^x 2 = \frac{m}{m+n}$, $A^x 3 = 0$, &c,

$B^x 1 = \frac{n}{m+n}$, $B^x 2 = 0$; donc

$M^x = M^{x-1} - \frac{n}{m+n}$,

$N^x = N^{x-1} - \frac{n}{m+n} M^{x-1}$;

$P^x = P^{x-1} - \frac{n}{m+n} N^{x-1}$,

&c, $V^{y,x} = \frac{m}{m+n} V^{y,x-1}$.

Mais la premiere de ces équations donne $M^{x-1} = c - \frac{n}{m+n}(x-1) = -\frac{n}{m+n}(x-1)$, car lorsque $x=1$, on doit avoir $M^{x-1}=0$; donc $M^x = -\frac{n}{m+n}x$. Alors la seconde équation devient $N^x = N^{x-1} + \frac{n^2}{(m+n)^2}(x-1)$; d'où l'on tire,

en déterminant la constante arbitraire comme nous venons de faire, $N^{x-1} = \frac{n^2}{(m+n)^2}(x-1)\frac{x-2}{2}$, & par conséquent $N^x = \frac{n^2}{(m+n)^2}\, x\, \frac{x-1}{2}$. On trouvera de la même maniere $P^x = -\frac{n^3}{(m+n)^3}\, x \,.\, \frac{x-1}{2} \,.\, \frac{x-2}{3}$; & ainsi des autres. Quant à l'équation $V^{y,x} = \frac{m}{m+n} V^{y,x-1}$, elle a pour intégrale complette $V^{y,x-1} = c\left(\frac{m}{m+n}\right)^{x-1}$; or comme la supposition de $x=1$, doit aussi rendre cette fonction nulle ; il s'ensuit que dans cet exemple $V^{y,x}=0$. Le Problême est donc réduit à intégrer l'équation que voici

$$Z^{y,x} - \frac{n}{m+n}\, x\, Z^{y-1,x} + \frac{n^2}{(m+n)^2}\, x \,.\, \frac{x-1}{2} Z^{y-2,x} - \frac{n^3}{(m+n)^3}\, x \,.\, \frac{x-1}{2} \,.\, \frac{x-2}{3}\, Z^{y-3,x} + \&c = 0.$$

On satisfera à cette équation, en prenant $Z^{y,x} = \lambda^{y-1}$, & λ sera donné par $1 - \frac{n}{(m+n)\lambda}\, x + \frac{n^2}{(m+n)^2\lambda^2}\, x \,.\, \frac{x-1}{2} - \frac{n^3}{(m+n)^3\lambda^3}\, x \,.\, \frac{x-1}{2} \,.\, \frac{x-2}{3} + \&c = 0$, qui n'est autre que $\left(1 - \frac{n}{(m+n)\lambda}\right)^x = 0$. On ne peut tirer de celle-ci

que cette seule valeur de λ, $\lambda = \frac{n}{m+n}$; ainsi pour avoir l'intégrale complette demandée, on fera $Z^{y,x} = \Pi^{y,x}\left(\frac{n}{m+n}\right)^{y-1}$, valeur qui étant substituée dans l'équation dont il s'agit, la changera en la suivante, $\Pi^{y,x} - x\Pi^{y-1,x} + x\frac{x-1}{2}\Pi^{y-2,x} - x \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-2}{3}\Pi^{y-3,x} + \&c = 0$, qu'on voit être la même que $\Delta^x\Pi^{y,x} = 0$. Donc $Z^{y,x} = \left(\frac{n}{m+n}\right)^{y-1}$

$$\left[c1 + c2\,(y-1) + c3 \cdot \frac{(y-1)(y-2)}{1.2} + \ldots + k\,\frac{(y-1)(y-2)\ldots\ldots(y-x+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(x-1)}\right].$$

Pour déterminer les fonctions $c1$, $c2$, $c3$ ...... k qui peuvent renfermer x; on remarquera que lorsque $y = x$, il est certain que Pierre doit perdre, & qu'alors la probabilité de Paul pour gagner doit se changer en certitude. Or en représentant la certitude par l'unité dont chaque probabilité est une fraction, on verra que $Z^{y,x}$ doit être $= 1$, lorsque $y = x$; dans cette hypothèse la proposée devient $1 = \frac{n}{m+n} Z^{y-1,x} + \frac{m}{m+n}$, & nous apprend que $Z^{y,x}$ doit être aussi $= 1$, lorsque $y = x - 1$; on trouvera de la même maniere que la supposition de $y = x - 2$ doit rendre $Z^{y,x} = 1$, & ainsi de suite. Donc si l'on fait $y = 1$, on aura $Z^{y,x} = 1$, & $c1 = 1$; si l'on fait $y = 2$, on aura $Z^{y,x} = 1$, & $1 = \frac{n}{m+n}(c1 + c2)$,

d'où

d'où l'on tirera $c2=\frac{m}{n}$; si l'on fait $y=3$, on aura $Z^{y,x}=1$ & $1=\left(\frac{n}{m+n}\right)^2(c1+2c2+c3)$; d'où l'on tirera $c3=\frac{m^2}{n^2}$; &c. Il suit de tout cela que la probabilité de Paul pour gagner, ou

$$Z^{y,x}=\left(\frac{n}{m+n}\right)^{y-1}\left[1+\frac{m}{n}(y-1)+\frac{m^2}{n^2}\cdot\frac{(y-1)(y-2)}{1.2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{m^{x-1}}{n^{x-1}}\cdot\frac{(y-1)(y-2)\ldots\ldots(y-x+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(x-1)}\right].$$

On trouvera dans le Mémoire de M. de la Place, cité au commencement de l'article précédent, la solution de plusieurs autres Problêmes intéressans. C'est aussi dans ce même Mémoire qu'il a remarqué un très-bel usage du Calcul dont il s'agit pour déterminer la nature des fonctions d'après des conditions données. MM. le Marquis de Condorcet & Monge ont fait en même-temps la même remarque. Le Mémoire de M. le Marquis de Condorcet est imprimé dans le volume de l'Académie de 1771; il y en a plusieurs de M. Monge, qu'on trouvera dans le tome VII des Mémoires présentés à l'Académie par divers Savans, & dans le cinquiéme volume des Mêlanges de la Société Royale de Turin. Nous terminerons ce Chapitre par résoudre deux Problêmes, où il sera question de déterminer les fonctions arbitraires dans les intégrales complettes de deux équations aux différences partielles, l'une du premier, l'autre du second ordre.

95. L'équation $\alpha=F:(\omega)$, où α est fonction de x, y & z, & où ω ne renferme que x & y, peut

être regardée comme l'intégrale complette de quelqu'équation aux différences partielles du premier ordre. Or l'équation $\alpha = F:(\omega)$ étant proposée, on demande de déterminer la fonction arbitraire, pour qu'elle satisfasse à cette condition, qu'en faisant $y = X$, on ait $z = K$; par X & K on entend des fonctions données de x & de constantes.

Je suppose qu'en mettant dans la proposée X & K pour y & z, on la change en la suivante $A = F:(m)$. Cela posé, on fera $m = t$, t étant une nouvelle variable; & lorsqu'on aura tiré de cette équation la valeur de x en fonction de t, on mettra cette valeur dans $A = F:(m)$; si par cette substitution celle-ci devient $T = F:(t)$, comme T est une fonction dont on connoît la forme, il est clair qu'on connoîtra aussi la forme de la fonction désignée par F.

Je prendrai pour exemple l'équation

$$y^{\frac{n}{y}}\left(z - \frac{axy\sqrt{(x^2+y^2)}}{x+2y}\right) = F:\left(\frac{x}{y}\right),$$ qui est (page 296) l'intégrale complette de $y^2 \frac{dz}{dy} + yx \frac{dz}{dx} + xz = axy\sqrt{(x^2+y^2)}$; & je demanderai de déterminer la fonction arbitraire, de maniere qu'en faisant $y = x + h$, on ait $z = x + i$, h & i étant des quantités constantes. Par cette substitution, la proposée deviendra $(x+h)^{\frac{n}{x+h}}\Big(x + i -$

$$\frac{ax(x+h)\sqrt{(x^2+(x+h)^2)}}{3x+2h}\Big) = F:\left(\frac{x}{x+h}\right);$$ or si l'on fait $\frac{x}{x+h} = t$, & que l'on mette dans l'équation précédente pour x sa valeur $\frac{ht}{1-t}$, on en ti-

rera $F:(t)=\left(\frac{h}{1-t}\right)^{t+1}\left(t+\frac{i}{h}(1-t)-\frac{aht\sqrt{(t^2+1)}}{(2+t)(1-t)}\right)$. Donc $F:\left(\frac{x}{y}\right)$ pour satisfaire à la condition requise, doit avoir la forme particuliere que voici : $\left(\frac{hy}{y-x}\right)^{\frac{y+x}{y}}\left(\frac{x}{y}+\frac{i}{h}\cdot\frac{y-x}{y}-\frac{ahx\sqrt{(y^2+x^2)}}{(2y+x)(y-x)}\right)$.

Maintenant l'on propose $\alpha=\beta F:(\omega)+f:(\pi)$; où α est fonction de x, y & z, & où β, ω & π ne renferment que x & y; & l'on demande de déterminer les fonctions arbitraires pour qu'elles satisfassent aux deux conditions suivantes; 1°. qu'en faisant $y=X$, on ait $z=K$; 2°. qu'en faisant $y=X1$, on ait $z=K1$; par X, $X1$, K, $K1$ on entend des fonctions données de x & de constantes.

Je suppose qu'en faisant successivement les substitutions précédentes, on tire de la proposée les deux équations que voici,

$$(A)\ldots\ldots\ldots A=BF:(m)+f:(n),$$
$$(B)\ldots\ldots\ldots A1=B1F:(m1)+f:(n1);$$

Cela posé, on fera $n=t$, & lorsqu'on en aura tiré la valeur de x en fonction de t, on mettra cette valeur dans l'équation A, qui deviendra par-là

$$(C)\ldots\ldots T=\theta F:(\tau)+f:(t).$$

On fera aussi $n1=t$, & en opérant sur l'équation B comme nous avons fait sur l'équation A, on aura

$$(D)\ldots\ldots T1=\theta 1F:(\tau 1)+f:(t).$$

On ôtera l'équation D de l'équation C, ce qui donnera

$$(E) \ldots\ldots T - T1 = \theta F:(\tau) - \theta 1 F:(\tau 1).$$

Il me reste à traiter l'équation E; pour cela j'imagine une fonction U d'une nouvelle variable u, telle que $\tau = U$ & $\tau 1 = U'$, U' étant ce que devient U lorsque u devient $u + 1$; puis je tire de $\tau = U$ la valeur de t en fonction de U, & par conséquent aussi la valeur $\tau 1$ en fonction de la même quantité; si celle-ci $= U1$, j'aurai $U' = U1$, équation aux différences finies de laquelle, dans beaucoup de cas, je pourrai tirer la valeur de U en fonction de u. Je mettrai pour t sa valeur en fonction de U dans l'équation E, & comme par cette substitution elle viendra de cette forme,

$$(K) \ldots\ldots W = VF:(U) + V1 F:(U');$$

W, V & $V1$ étant des fonctions données de U; le Problême pourra toujours se réduire, lorsqu'on aura U en fonction de u, à l'intégration d'une équation linéaire du premier ordre aux différences finies de la même forme que celle dont nous nous sommes occupés dans le Chapitre précédent. Je vais éclaircir cette théorie par un exemple.

L'équation $\frac{d^2 z}{dy^2} + a \frac{d^2 z}{dy\, dx} + b \frac{d^2 z}{dx^2} = 0$, a pour intégrale complette (n°. 86) $z = F:(r1y + x) + f:(r2y + x)$ lorsque les racines $r1$ & $r2$ de l'équation du second degré $r^2 + ar + b = 0$ sont inégales. On demande de déterminer les fonctions arbitraires de maniere qu'elles satisfassent aux deux conditions suivantes, 1°. qu'en faisant $y = ax$, on ait $z = bx^\lambda$; 2°. qu'en faisant $y = hx$, on ait $z = ix^\mu$; a, b, h, i, λ & μ sont des quantités constantes.

Par ces substitutions, on tire de la proposée

$bx^\lambda = F:[(ar1+1).x]+f:[(ar2+1).x]$,
$ix^\mu = F:[(hr1+1).x]+f:[(hr2+1).x]$.

Soit $(ar2+1)x=t$, & la premiere deviendra

$$\frac{bt^\lambda}{(ar2+1)^\lambda} = F:\left(\frac{ar1+1}{ar2+1}t\right)+f:(t);$$

Soit aussi $(hr2+1)x=t$, ce qui changera l'autre en celle-ci,

$$\frac{it^\mu}{(hr2+1)^\mu} = F:\left(\frac{hr1+1}{hr2+1}t\right)+f:(t).$$

Donc $\frac{bt^\lambda}{(ar2+1)^\lambda} - \frac{it^\mu}{(hr2+1)^\mu} = F:\left(\frac{ar1+1}{ar2+1}t\right)$
$-F:\left(\frac{hr1+1}{hr2+1}t\right)$.

On fera $\frac{ar1+1}{ar2+1}t=U$ & $\frac{hr1+1}{hr2+1}t=U'$; d'où l'on tirera $U'=RU$, en faisant pour abréger,
$\frac{(hr1+1)(ar2+1)}{(hr2+1)(ar1+1)}=R$. On intégrera cette équation aux différences finies, & on trouvera $U=R^u$.
Mais on a

$$\frac{bU^\lambda}{(ar1+1)^\lambda} - \frac{i(ar2+1)^\mu U^\mu}{(ar1+1)^\mu(hr2+1)^\mu} = F:(U) - F:(U') = -\Delta F:(U);$$ donc $F:(U) =$

$$\frac{i(ar2+1)^\mu}{[(ar1+1)(hr2+1)]^\mu}\Sigma U^\mu - \frac{b}{(ar1+1)^\lambda}\Sigma U^\lambda +$$

constante. De plus, U^μ étant égal à $R^{\mu u}$, & $\Sigma R^{\mu u}$ à la somme de la progression géométrique R^μ, $R^{2\mu}\ldots$, $R^{\mu(u-1)}$, ou à $\frac{R^{\mu u}-R^\mu}{K^\mu-1}$; il est clair que $\Sigma U^\mu =$

$\frac{U^\mu - R^\mu}{R^\mu - 1}$. On trouvera de la même maniere que $\Sigma U^\lambda = \frac{U^\lambda - R^\lambda}{R^\lambda - 1}$; & que par conséquent $F:(U) =$ $i\left[\frac{ar2+1}{(h-a)(r1-r2)}\right]^\mu \left(U^\mu - \left[\frac{(hr1+1)(ar2+1)}{(hr2+1)(ar1+1)}\right]^\mu\right)$ $-b\left[\frac{hr2+1}{(h-a)(r1-r2)}\right]^\lambda \left(U^\lambda - \left[\frac{(hr1+1)(ar2+1)}{(hr2+1)(ar1+1)}\right]^\lambda\right)$ + constante; équation à laquelle on peut donner cette forme plus simple,

$$F:(U) = i\left[\frac{(ar2+1)U}{(h-a)(r1-r2)}\right]^\mu - b\left[\frac{(hr2+1)U}{(h-a)(r1-r2)}\right]^\lambda + C.$$

Donc $F:\left(\frac{ar1+1}{ar2+1}t\right) = i\left[\frac{(ar1+1)t}{(h-a)(r1-r2)}\right]^\mu - b\left[\frac{(ar1+1)(hr2+1)t}{(ar2+1)(h-a)(r1-r2)}\right]^\lambda + C$; & par conséquent

$$f:(t) = b\left[\frac{t}{ar2+1}\right]^\lambda \left(1 - \left[\frac{(hr2+1)(ar1+1)}{(h-a)(r1-r2)}\right]^\lambda\right) - i\left[\frac{(ar1+1)t}{(h-a)(r1-r2)}\right]^\mu - C.$$

Il suit de tout cela que pour que l'intégrale proposée satisfasse aux conditions requises, il faut qu'elle soit

$$z = i\left[\frac{(ar2+1)(r1y+x)}{(h-a)(r1-r2)}\right]^\mu - i\left[\frac{(ar1+1)(r2xy+x)}{(h-a)(r1-r2)}\right]^\mu$$

$$, \left[\frac{r2y+x}{ar2+1}\right]^{\lambda} \left(1+\left[\frac{(hr2+1)(ar1+1)}{(h-a)(r1-r2)}\right]^{\lambda} - \frac{(hr2+1)(r1y+x)}{(h-a)(r1-r2)}\right]^{\lambda}.$$

Nous ne nous étendrons pas davantage ſur la dé-·mination des fonctions arbitraires qui entrent dans ; intégrales complettes des équations aux différences ırtielles ; & nous terminerons ce Chapitre par re-ıarquer que ſi les conditions auxquelles on aura à ıtisfaire ne peuvent pas s'exprimer algébriquement, u, ce qui revient au même, ſi elles ne ſont pas ſou-niſes à la loi de continuité, il faudra recourir aux urfaces courbes pour conſtruire les fonctions arbi-:raires. M. Monge a donné pluſieurs de ces conſtruc-tions dans les Mémoires que nous avons cités ; & ce n'eſt pas la partie la moins intéreſſante du travail de cet habile Géométre.



CHAPITRE XII.

Suite du Chapitre VI sur la Méthode des Variations.

96. LA formule $\int S\zeta\, dx\, dy$, où ζ renferme x, y, une fonction z de ces variables, & les différences partielles de tous les ordres de cette fonction; cette formule, dis-je, étant proposée, on demande quelle seroit sa variation, si la quantité z venoit à varier d'une maniere quelconque. Nous avons démontré (n°. 64) que $\delta \int S\zeta\, dx\, dy = \int S\, dx\, dy\, \delta\zeta$; or si l'on suppose

$$d\zeta = L\,dx + M\,dy + N\,dz + P\,d\frac{dz}{dx} + Q\,d\frac{d^2z}{dx^2} + R\,d\frac{d^3z}{dx^3} + \&c;$$
$$+ P'\,d\frac{dz}{dy} + Q'\,d\frac{d^2z}{dx\,dy} + R'\,d\frac{d^3z}{dx^2\,dy}$$
$$+ Q''\,d\frac{d^2z}{dy^2} + R''\,d\frac{d^3z}{dx\,dy^2}$$
$$+ R'''\,d\frac{d^3z}{dy^3}$$

à cause de $\delta\frac{dz}{dx} = \frac{d\delta z}{dx}$, $\delta\frac{dz}{dy} = \frac{d\delta z}{dy}$, $\delta\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2\delta z}{dx^2}$, &c, on aura

$$\delta \int S\zeta\, dx\, dy = \int S\, dx\, dy \Big(N\delta z$$

$$+ P\frac{d\delta z}{dx} + Q\frac{d^2\delta z}{dx^2} + R\frac{d^3\delta z}{dx^3} + \&c\Big).$$

$$+ P'\frac{d\delta z}{dy} + Q'\frac{d^2\delta z}{dxdy} + R'.\frac{d^3\delta z}{dx^2dy}$$

$$+ Q''\frac{d^2\delta z}{dy^2} + R''\frac{d^3\delta z}{dxdy^2}$$

$$+ R'''\frac{d^3\delta z}{dy^3}$$

Mais

$\int SP\frac{d\delta z}{dx}dxdy = Sdy\int P\frac{d\delta z}{dx}dx = SP\delta z dy -$
$Sdy\int\frac{dP}{dx}\delta z dx = SP\delta z dy - \int S\frac{dP}{dx}\delta z dxdy,$

$\int SP'\frac{d\delta z}{dy}dxdy = \int dx SP'\frac{d\delta z}{dy}dy = \int P'\delta z dx$
$- \int dx S\frac{dP'}{dy}\delta z dy = \int P'\delta z dx - \int S\frac{dP'}{dy}\delta z dxdy;$

$\int SQ\frac{d^2\delta z}{dx^2}dxdy = Sdy\int Q\frac{d^2\delta z}{dx^2}dx = SQ\frac{d\delta z}{dx}$
$dy - Sdy\int\frac{dQ}{dx}\frac{d\delta z}{dx}dx = S\left(Q\frac{d\delta z}{dx} - \frac{dQ}{dx}\delta z\right)$
$dy + \int S\frac{d^2Q}{dx^2}\delta z dxdy;$

$\int SQ'\frac{d^2\delta z}{dxdy}dxdy = Sdy\int Q'\frac{d^2\delta z}{dxdy}dx =$
$SQ'\frac{d\delta z}{dy}dy - \int dx S\frac{dQ'}{dx}\frac{d\delta z}{dy}dy = Q'\delta z -$
$S\frac{dQ'}{dy}\delta z dy - \int\frac{dQ'}{dx}\delta z dx + \int S\frac{d^2Q'}{dxdy}\delta z dxdy,$

$\int SQ''\frac{d^2\delta z}{dy^2}dxdy = \int dx SQ''\frac{d^2\delta z}{dy^2}dy =$

$$\int Q'' \frac{d\delta z}{dy} dx - \int dx\, S \frac{dQ''}{dy} \frac{d\delta z}{dy} dy =$$

$$\int \left(Q'' \frac{d\delta z}{dy} - \frac{dQ''}{dy} \delta z \right) dx + \int S \frac{d^2 Q''}{dy^2} \delta z\, dx\, dy,$$

$$\int S\, R \frac{d^3 \delta z}{dx^3} dx\, dy = S dy \int R \frac{d^3 \delta z}{dx^3} dx =$$

$$S R \frac{d^2 \delta z}{dx^2} dy - S dy \int \frac{dR}{dx} \frac{d^2 \delta z}{dx^2} dx = S \left(R \frac{d^2 \delta z}{dx^2} \right.$$

$$\left. - \frac{dR}{dx} \frac{d\delta z}{dx} + \frac{d^2 R}{dx^2} \delta z \right) dy - \int S \frac{d^3 R}{dx^3} \delta z\, dx\, dy.$$

$$\int S\, R' \frac{d^3 \delta z}{dx^2 dy} dx\, dy = S dy \int R' \frac{d^3 dz}{dx^2 dy} dx =$$

$$S R' \frac{d^2 \delta z}{dx dy} dy - S dy \int \frac{dR'}{dx} \frac{d^2 \delta z}{dx dy} dx = R' \frac{d\delta z}{dx}$$

$$- \frac{dR'}{dx} \delta z - S \left(\frac{dR'}{dy} \frac{d\delta z}{dx} - \frac{d^2 R'}{dx dy} \delta z \right) dy +$$

$$\int \frac{d^2 R'}{dx^2} \delta z\, dx - \int S \frac{d^3 R'}{dx^2 dy} \delta z\, dx\, dy,$$

$$\int S R'' \frac{d^3 \delta z}{dx dy^2} dx\, dy = S dy \int R'' \frac{d^3 \delta z}{dx dy^2} dx =$$

$$S R'' \frac{d^2 \delta z}{dy^2} dy - \int dx\, S \frac{dR''}{dx} \frac{d^2 \delta z}{dy^2} dy = R'' \frac{d\delta z}{dy} -$$

$$\frac{dR''}{dy} \delta z + S \frac{d^2 R''}{dy^2} \delta z\, dy - \int \left(\frac{dR''}{dx} \frac{d\delta z}{dy} - \right.$$

$$\left. \frac{d^2 R''}{dx dy} \right) dx - \int S \frac{d^3 R''}{dx dy^2} \delta z\, dx\, dy.$$

$$\int S R''' \frac{d^3 \delta z}{dy^3} dx\, dy = \int \left(R''' \frac{d^2 \delta z}{dy^2} - \frac{dR'''}{dy} \frac{d\delta z}{dy} \right.$$

$$\left. + \frac{d^2 R'''}{dy^2} \delta z \right) dx - \int S \frac{d^3 R'''}{dy^3} \delta z\, dx\, dy,$$

&c; donc $\delta\int S\zeta\, dx\, dy =$

$$\int S\, dx\, dy\, \delta z \left(\begin{array}{l} N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \&c \\ \quad - \frac{dP'}{dy} + \frac{d^2Q'}{dx\,dy} - \frac{d^3R'}{dx^2dy} \\ \quad\quad + \frac{d^2Q''}{dy^2} - \frac{d^3R''}{dx\,dy^2} \\ \quad\quad\quad - \frac{d^3R'''}{dy^3} \end{array} \right)$$

$$+ \int dx\, \delta z \left(\begin{array}{l} P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{d^2R'}{dx^2} + \&c \\ \quad - \frac{dQ''}{dy} + \frac{d^2R''}{dx\,dy} \\ \quad\quad + \frac{d^2R'''}{dy^2} \end{array} \right)$$

$$+ \int dx \frac{d\delta z}{dy} \left(\begin{array}{l} Q'' - \frac{dR''}{dx} + \&c \\ \quad - \frac{dR'''}{dy} \end{array} \right) +$$

$$\int dx \frac{d^2\delta z}{dy^2} (R''' + \&c)\ \&c$$

$$+ S\, dy\, \delta z \left(\begin{array}{l} P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} + \&c \\ \quad - \frac{dQ'}{dy} + \frac{d^2R}{dx\,dy} \\ \quad\quad + \frac{d^2R''}{dy^2} \end{array} \right)$$

$$+ S\, dy \frac{d\delta z}{dx} \left(\begin{array}{l} Q - \frac{dR}{dx} + \&c \\ \quad - \frac{dR'}{dy} \end{array} \right) +$$

$$S dy \frac{d^2 \delta z}{dx^2}(R - \&c)\ \&c$$

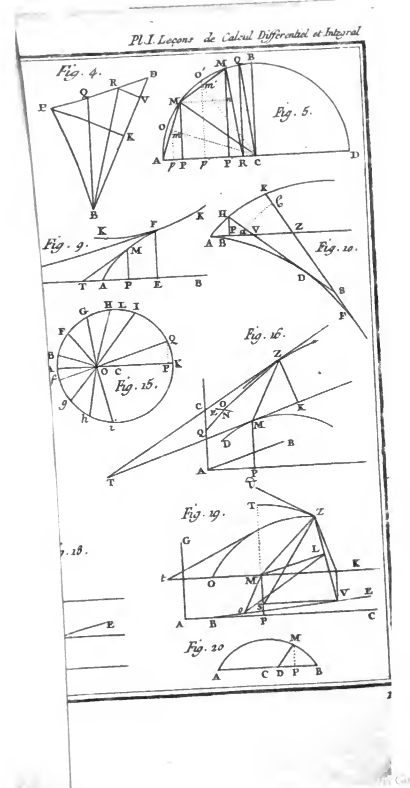
$$+ \delta z \left(Q' - \frac{dR'}{dx} + \&c\right) + \frac{d\delta z}{dx}(R' - \&c) +$$

$$- \frac{dR''}{dy}$$

$$\frac{d\delta z}{dy}(R'' - \&c)\ \&c.$$

Il feroit facile de réfoudre un plus grand nombre de Problêmes, en fuivant le même ordre que dans le Chapitre VI. Mais nous aurions défiré y joindre quelques applications, où nous aurions trouvé occafion de faire ufage de ces déterminations & de ces conftructions des fonctions arbitraires dont nous avons parlé à la fin du Chapitre précédent. Nos tentatives ont été infructueufes; & les queftions phyfiques que nous nous étions propofées, nous ont conduit à des équations fi compliquées, qu'il nous a été impoffible jufqu'à préfent d'en tirer des réfultats fatisfaifans.

FIN.


Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 19.
Fig. 18.
Fig. 20



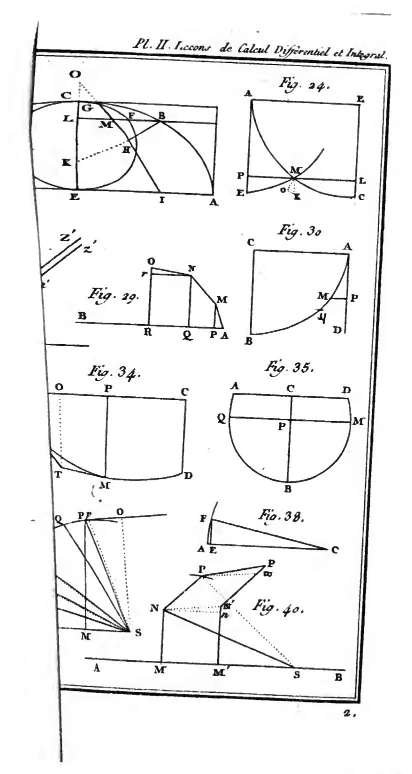


Fig. 24.
Fig. 30
Fig. 29.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 38.
Fig. 40.
O
C
G
L
M
F
B
H
K
E
I
A
P
L
o
K
c
N
M
r
R
Q
D
T
S



TABLE SOMMAIRE.

PREMIERE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

Du Calcul des Différences en général.

CHAPITRE II.

De la Méthode des anciens Géométres, connue sous le nom de Méthode des limites.

CHAPITRE III.

Du Calcul Différentiel.

CHAPITRE IV.

Des principaux usages du Calcul Différentiel.

CHAPITRE V.

Du Calcul Intégral en général.

CHAPITRE VI.

De la Méthode des Variations.

SECONDE PARTIE.

CHAPITRE VII.

De l'intégration des formules différentielles qui ne renferment qu'une seule variable.

CHAPITRE VIII.

De la ſéparation des variables dans les équations différentielles.

CHAPITRE IX.

De la maniere d'intégrer les équations différentielles en les multipliant par des facteurs.

CHAPITRE X.

De l'intégration des équations aux différences partielles.

CHAPITRE XI.

De l'intégration des équations aux différences finies.

CHAPITRE XII.

Suite du Chapitre VI sur la Méthode des Variations.

Fin de la Table.

De l'Imprimerie de CHARDON, rue Galande. 1777.

ERRATA.

PAGE 2, *ligne* 21, $2a + x^2$ *lisez* $2ax + x^2$

Page 45, *ligne* 10, *maximum* *lisez* *minimum*

Page 47, *ligne* 4, $(1 + x)^2$ *lisez* $(1 + x^2)^2$

Page 61, *ligne* 15, l'un & l'autre *lisez* l'un ou l'autre

Ibid. ligne 17, $x^{\frac{1}{3}}$ *lisez* $x^{-\frac{1}{3}}$

Page 77, *ligne* 11, $(a^2 + x^2)dx$ *lisez* $(a^2 + 2x^2)dx$

Page 80, *lignes* 11 & 13, $r^2 ds$ *lisez* $r\,ds$

Page 82, *ligne* 10, $e^u y\,dy$ *lisez* $e^u y\,du$

Page 125, *ligne* 16, $+ 3 \frac{d^2u}{dt^2}$ *lisez* $- 3 \frac{d^2u}{dt^2}$

Page 132, *ligne* 13, $1 + x$ *lisez* $1 + 6x$

Ibid. ligne 15, *lisez* $y = 1 + 6x + \frac{6^2}{1.2} x^2 + \frac{6(6^2 + 1)}{1.2.3} x^3 + \ldots$

Page 181, *ligne* 2, $e^{-\frac{u^2}{2m^2}}$ *lisez* $e^{\frac{u^2}{2m^2}}$

Page 190, *ligne* 5, $e^{-(\frac{h}{2} + h')x}$ *lisez* $e^{-(\frac{h}{2} - h')x}$

Page 211, *ligne* 6, $-\frac{h + 2gf}{gl}$ *lisez* $-\frac{h + 2gf - 2gl}{gl}$

Page 274, *ligne* 14, $A\,dq + Q\,dA$, *lisez* $A\,dq + q\,dA$

Page 477, *ligne* 10, *lisez* est homogène en x, y; dx, dy, d^2y; en faisant $\frac{dy}{dx} = p, \frac{dp}{dx} = q$. puis $y = ux \ldots$

Voilà les seules fautes essentielles que j'aie encore remarquées; je ne doute pas qu'on n'en rencontre d'autres; on sait la difficulté qu'il y a d'imprimer correctement ces sortes d'Ouvrages.

